B13 AUG 4

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 164

Heft 4

Ausgegeben den 17. Juli 1931

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1931

Band 164. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Remak, Robert, Über die erzeugenden invarianten Untergruppen der subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen 197

Hellerich, Johannes, und **Robert Schmidt,** Numerische Auswertung von Stieltjesintegralen 243

Weiss, E. A., Über ein Bild der R_4-Konfiguration $(10_6\ 15_4)$ im Linienraum . . . 256

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Über die erzeugenden invarianten Untergruppen der subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen.

Von *Robert Remak* in Berlin.

Einleitung.

In dieser Arbeit will ich die Untersuchungen über die subdirekten Darstellungen der endlichen Gruppen (Darstellungen als Untergruppen direkter Produkte) fortsetzen. Die beiden vorangehenden Arbeiten „Über minimale invariante Untergruppen in der Theorie der endlichen Gruppen“, [1]) zitiert MIU, und „Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte“, [2]) zitiert DUDP, muß ich als bekannt voraussetzen. Während in der letztgenannten Arbeit das Hauptinteresse den subdirekten Faktoren galt, sollen in dieser Arbeit die erzeugenden invarianten Untergruppen der Faktoren untersucht werden. Die erzeugende invariante Untergruppe eines subdirekten Faktors $\widehat{\mathfrak{B}}$ war die invariante Untergruppe derjenigen Elemente der ganzen Gruppe, deren $\widehat{\mathfrak{B}}$-Komponente in der Darstellung gleich $\widehat{\mathfrak{E}}$ war.

Zunächst wird in § 1 folgender Hilfssatz bewiesen. Es sei $\mathfrak{D} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ ein Fuß von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ nicht enthalten in $\mathfrak{D}$; dann ist $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$ Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$. Ein solcher Fuß heiße ein „bodenständiger“ Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$. Eine Faktorgruppe heiße bodenständig, wenn ihre sämtlichen Füße bodenständig sind; sie heiße „schwebend“, wenn keiner ihrer Füße bodenständig ist; wenn sie weder bodenständig noch schwebend ist, heiße sie „zum Teil bodenständig“. Eine invariante Untergruppe $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ heiße ein „Stativ“ in $\mathfrak{G}$, wenn jede umfassendere invariante Untergruppe auch einen umfassenderen Sockeldurchschnitt besitzt. Es wird bewiesen, daß eine Faktorgruppe dann und nur dann bodenständig ist, wenn die erzeugende invariante Untergruppe ein Stativ ist. Eine Faktorgruppe ist dann und nur dann schwebend, wenn die erzeugende invariante Untergruppe den Sockel enthält. In einer subdirekten Zerlegung ist ein schwebender Faktor stets überzählig und kann diese Eigenschaft auch nicht verlieren, wenn andere überzählige Faktoren weggelassen werden. In einer ökonomischen Zerlegung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ in subdirekte Faktoren können keine schwebenden Faktoren vorkommen, da sie überzählig wären; der einzige Fuß eines Faktors der Zerlegung ist also bodenständig, die erzeugende invariante Untergruppe ist ein Stativ und zwar ein Maximalstativ, d. h. ein Stativ über einem Komplementärfuß. Unter einem Komplementärfuß verstehen wir eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die im Sockel $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ enthalten ist, und vom Range $r - 1$, wo r der Rang des Sockels ist; d. h. der Komplementärfuß ist direkter Komplementärfaktor eines Fußes bei der direkten Zerlegung des Sockels in Füße. In jeder subdirekten Zerlegung einer Gruppe in unzerlegbare ökonomische Faktoren können

[1]) Journ. f. Math. **162** (1930), S. 1—16.

[2]) Journ. f. Math. **163** (1930), S. 1—44.

die erzeugenden Maximalstative durch andere mit den gleichen Sockeldurchschnitten ersetzt werden.

In § 2 wird eine spezielle Methode zur ökonomischen Zerlegung einer Gruppe in subdirekte unzerlegbare Faktoren behandelt. Jedes direkte Produkt von invarianten Untergruppen gab nach DUDP Satz 5 Anlaß zu einer meromorphen Zerlegung der Gruppe. Als direktes Produkt invarianter Untergruppen benutze man eine direkte Zerlegung des Sockels in Füße. Jeden Faktor zerlege man in der gleichen Weise weiter, bis man auf unzerlegbare, also einfüßige Faktoren stößt. Die schwebenden Faktoren lasse man weg. Es wird gezeigt, daß man so, d. h. ohne weitere Weglassungen, stets zu einer ökonomischen Zerlegung der Gruppe in subdirekte unzerlegbare Faktoren gelangt, und daß man durch dies Verfahren *jede* ökonomische Zerlegung in subdirekte unzerlegbare Faktoren erhält.

Die erzeugenden invarianten Untergruppen der ökonomischen Zerlegungen in subdirekte unzerlegbare Faktoren waren Maximalstative. Das legt die Frage nahe, ob sich der Bergiff der ökonomischen Zerlegung so verallgemeinern läßt, daß er dem allgemeinen Stativ-Begriff entspricht. Das geschieht in § 3. Für die verallgemeinerte Definition der ökonomischen Zerlegung wird auf die Unzerlegbarkeit der Faktoren verzichtet. In einer verallgemeinerten ökonomischen Zerlegung darf kein Faktor überzählig sein. Aber es wird noch mehr verlangt. Es sei $\widehat{\mathfrak{B}}$ ein Faktor einer Darstellung. $\widehat{\mathfrak{U}} <_i \widehat{\mathfrak{B}}$; $\widehat{\mathfrak{U}} \neq \widehat{\mathfrak{E}}$. Man führe für die Komplexe der Faktorgruppe $\frac{\widehat{\mathfrak{B}}}{\widehat{\mathfrak{U}}}$ neue Bezeichnungen ein:

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}} \sim \frac{\widehat{\mathfrak{B}}}{\widehat{\mathfrak{U}}}.$$

Wenn man für jede Komponente $\widehat{B} < \widehat{\mathfrak{B}}$ nur die Angabe des zugehörigen Elementes $\widehat{\widehat{B}} < \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}$ macht, so daß also $\widehat{B} \cdot \widehat{\mathfrak{U}} \sim \widehat{\widehat{B}}$, so ersetzt man die Angabe der Komponente $\widehat{\mathfrak{B}}$ durch eine ungenauere. Wenn man diesen Ersatz vornehmen kann, ohne daß die Darstellung der gesamten Gruppe $\mathfrak{G}$ aufhört, bestimmt, d. h. eine eineindeutig isomorphe zu sein, so wollen wir sagen, der Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}$ ist kürzbar. Die Überzähligkeit fällt mit unter die Kürzbarkeit, wenn nämlich $\widehat{\mathfrak{U}} = \widehat{\mathfrak{B}}$, also $\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}$ gleich der Einheit wird. Eine ökonomische Darstellung ist eine solche, in der kein Faktor kürzbar ist. Durch eine invariante Untergruppe $\widehat{\mathfrak{U}}_\nu <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ kann man dann und nur dann kürzen, wenn $\widehat{\mathfrak{U}}_\nu$ zur Blockkomponente $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ teilerfremd ist. $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ ist dann und nur dann unkürzbar, wenn der Sockel $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu$ von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ in $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ enthalten ist. Die erzeugenden invarianten Untergruppen der verallgemeinerten ökonomischen Faktoren sind Stative. Die alten ökonomischen Zerlegungen in unzerlegbare Faktoren sind auch im neuen Sinne ökonomisch.

Die ökonomischen Zerlegungen gehen, wie in § 4 gezeigt wird, wieder in solche über, wenn man Faktoren zusammenfaßt oder ökonomisch weiterzerlegt. Es gibt keine anderen ökonomischen Zerlegungen, als die durch Zusammenfassung aus ökonomischen Zerlegungen in unzerlegbare Faktoren entstehenden. Jedes Stativ kann als erzeugende invariante Untergruppe in einer ökonomischen Zerlegung auftreten. Es wird ferner untersucht, wann zwei Stative zu einer und derselben Zerlegung gehören können.

§ 5 setzt die bereits in DUDP begonnenen Untersuchungen über Eindeutigkeitsfragen fort und behandelt den Zusammenhang zwischen den direkten und den subdirekten Zerlegungen. Direkte Zerlegungen sind, als subdirekte aufgefaßt, im verallgemeinerten Sinne ökonomisch.

Der letzte § 6 behandelt eine wohlbestimmte, identisch eindeutig feststehende subdirekte Zerlegung einer beliebigen endlichen Gruppe, die die „kanonische" heißen möge. Sie ist im allgemeinen nicht ökonomisch. Zunächst werde die *erste* kanonische Zerlegung definiert, dadurch daß man *sämtliche* bodenständigen unzerlegbaren Faktoren der Gruppe aufstellt und alle untereinander kohärenten Faktoren zu einem einzigen Faktor zusammenfaßt. Die *zweite* kanonische Zerlegung erhält man durch Anwendung des in § 2 beschriebenen Verfahrens der fortgesetzten meromorphen Zerlegung, mit dem Unterschiede, daß der Sockel nicht mehr in Füße, sondern jedesmal nur in Kohärenten direkt zerlegt wird. Im Laufe des Verfahrens können sich die ursprünglichen Kohärenten erweitern. Das Ziel des Paragraphen ist es, zu zeigen, daß die erste und die zweite kanonische Zerlegung miteinander identisch sind.

§ 1. Die Stative.

Es mögen zunächst einige Eigenschaften des Sockels zusammengestellt werden.

Hilfssatz 1: *Der Sockel* $\mathfrak{S}$ *einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist zu keiner von* $\mathfrak{E}$ *verschiedenen invarianten Untergruppe* $\mathfrak{D}$ *von* $\mathfrak{G}$ *teilerfremd.*

Beweis: Wenn $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$, $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$, so enthält $\mathfrak{D}$ einen Fuß $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$; es ist $\mathfrak{F} < \mathfrak{S}$, mithin $\mathfrak{F} < (\mathfrak{D}, \mathfrak{S})$, also $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) \neq \mathfrak{E}$.

Der Durchschnitt $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S})$ einer invarianten Untergruppe $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ mit dem Sockel $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ heiße der „Sockeldurchschnitt" von $\mathfrak{D}$.

Hilfssatz 2: *Wenn* $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$, *so ist* $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S})$ *das Produkt sämtlicher Füße* $\mathfrak{F}$ *von* $\mathfrak{G}$, *für die* $\mathfrak{F} < \mathfrak{D}$.

Beweis: Es ist $\mathfrak{F} < \mathfrak{S}$, $\mathfrak{F} < \mathfrak{D}$, also $\mathfrak{F} < (\mathfrak{D}, \mathfrak{S})$. Andererseits ist, da $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) <_i \mathfrak{G}$ und $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) < \mathfrak{S}$, die Gruppe $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S})$ gleich dem Produkt sämtlicher in ihr enthaltener Füße von $\mathfrak{G}$ nach MIU Satz 1 a.

Hilfssatz 3: *Zwei invariante Untergruppen* $\mathfrak{D}_1$ *und* $\mathfrak{D}_2$ *von* $\mathfrak{G}$ *sind dann und nur dann teilerfremd, wenn ihre Sockeldurchschnitte teilerfremd sind.*

Beweis: Wenn

$$\mathfrak{D}_1 <_i \mathfrak{G}\,, \qquad \mathfrak{D}_2 <_i \mathfrak{G}\,, \qquad (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{E}\,,$$

ist

$$\big((\mathfrak{D}_1, \mathfrak{S})\,,\ (\mathfrak{D}_2, \mathfrak{S})\big) = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{E}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{E}.$$

Wenn umgekehrt $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{S}) = \mathfrak{E}$, ist $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{E}$, weil andernfalls, wenn $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) \neq \mathfrak{E}$ wäre, nach Hilfssatz 1 auch $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{S}) \neq \mathfrak{E}$ sein müßte.

Das gleiche gilt für den Durchschnitt von mehr als zwei invarianten Untergruppen.

Hilfssatz 4: *Es sei* $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$; $\mathfrak{S}$ *der Sockel von* $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$; $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{D}$; $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{S}_2) = \mathfrak{E}$. *Dann ist* $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_1$.

Beweis: Es ist

$$\mathfrak{S}_1 < (\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) < \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}.$$

Also ist nach DUDP Korollar 3 zu Satz 1.

$$(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_1 \times \big((\mathfrak{D}, \mathfrak{S})\,,\ \mathfrak{S}_2\big) = \mathfrak{S}_1 \times (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_1 \times (\mathfrak{D}, \mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{E} = \mathfrak{S}_1,$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz 5: *Es sei* $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$; $\mathfrak{F}$ *Fuß von* $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{F}$ *nicht enthalten in* $\mathfrak{D}$; *dann ist* $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$ *Fuß von* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$.

Beweis: Wenn $\mathfrak{F}$ nicht enthalten ist in $\mathfrak{D}$, ist $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}) = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F} = \mathfrak{D} \times \mathfrak{F}$. Gäbe es $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} <_i \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$, so daß

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} < \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} < \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}, \qquad \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} \neq \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} \neq \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}},$$

so wäre auch $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}$,

$$\mathfrak{D} < \mathfrak{X} < \mathfrak{D} \times \mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{D} \neq \mathfrak{X} \neq \mathfrak{D} \times \mathfrak{F}.$$

Nach DUDP Korollar 3 zu Satz 1 wäre

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{D} \times (\mathfrak{X}, \mathfrak{F}),$$

hierin

$$\mathfrak{E} \neq (\mathfrak{X}, \mathfrak{F}) \neq \mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{F} <_i \mathfrak{G}, \qquad \text{also} \qquad (\mathfrak{X}, \mathfrak{F}) <_i \mathfrak{G}.$$

Das widerspräche aber der Eigenschaft von $\mathfrak{F}$, Fuß von $\mathfrak{G}$ zu sein. Die Annahme, daß $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$ nicht Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ sein sollte, führt also zu einem Widerspruch. Mithin ist $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$ Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$.

Ein so entstandener Fuß möge „bodenständiger" Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ heißen.

Definition: *Das Produkt sämtlicher bodenständiger Füße möge der „bodenständige Sockel" der Faktorgruppe heißen; er ist Untergruppe des Sockels der Faktorgruppe.*

Korollar zu Hilfssatz 5: Wenn $\mathfrak{F} < \mathfrak{D}$, so ist $\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{F}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$ gleich der Einheit der Faktorgruppe. Man kann also anstatt über die nicht in $\mathfrak{D}$ enthaltenen Füße $\mathfrak{F}$ auch das Produkt über *alle* $\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}}$ bilden. Dies ist aber gleich $\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}}$.

Man setze $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_1$ und bestimme $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, wo $\mathfrak{S}_2 <_i \mathfrak{G}$, nach MIU Satz 1 a.

$\mathfrak{S}_2$ ist durch $\mathfrak{S}_1$ im allgemeinen nur isomorph eindeutig, nicht identisch eindeutig bestimmt. Es ist

$$\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{D}\mathfrak{S}_2.$$

Da $\mathfrak{S}_2 < \mathfrak{S}$, so ist

$$(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}_2) = (\mathfrak{D}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_2) = (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) = \mathfrak{E},$$

mithin

$$\mathfrak{D}\mathfrak{S} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2,$$

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}} \sim \mathfrak{S}_2.$$

Umkehrung zu Hilfssatz 5: *Es sei*

$$\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{F} <_i \mathfrak{G}, \qquad (\mathfrak{D}, \mathfrak{F}) = \mathfrak{E}.$$

Es sei $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$ *Fuß von* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$.

Behauptung: $\mathfrak{F}$ *ist Fuß von* $\mathfrak{G}$.

Beweis: Angenommen, die Behauptung wäre unrichtig, dann gäbe es $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}$, so daß

$$\mathfrak{X} < \mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{E} \neq \mathfrak{X} \neq \mathfrak{F}.$$

Dann wäre

$$(\mathfrak{D}, \mathfrak{X}) < (\mathfrak{D}, \mathfrak{F}) = \mathfrak{E},$$

also wäre

$$\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{X} = \mathfrak{D} \times \mathfrak{X} <_i \mathfrak{G},$$

mithin auch $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} <_i \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$.

Es ist

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} \neq \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} \neq \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}},$$

da die Ordnungen der drei Faktorgruppen verschieden sind. Wenn also $\mathfrak{F}$ kein Fuß von $\mathfrak{G}$ wäre, so wäre auch $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$ kein Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ entgegen der Voraussetzung. Mithin muß $\mathfrak{F}$ Fuß von $\mathfrak{G}$ sein.

Definition: *Eine Faktorgruppe* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ *heiße „schwebend", wenn der bodenständige Sockel gleich der Einheit der Faktorgruppe ist, d. h. wenn* $\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$, *also* $\mathfrak{D}\mathfrak{S} = \mathfrak{D}$, $\mathfrak{S} < \mathfrak{D}$, *d. h. die invariante Untergruppe den Sockel enthält; sie heiße „bodenständig", wenn der Sockel der Faktorgruppe gleich dem bodenständigen Sockel ist; sie heiße „teilweise bodenständig", wenn der bodenständige Sockel der Faktorgruppe von der Einheit der Faktorgruppe und von ihrem Sockel verschieden ist, d. h. wenn sie weder bodenständig noch schwebend ist.*

Ist die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ einfüßig, so sei $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{D}}$ der einzige Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$. $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{D}}$ ist gleichzeitig der Sockel der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$. Entweder ist der einzige Fuß bodenständig, also auch gleich dem bodenständigen Sockel; dann ist

$$\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}},$$

wo $\mathfrak{F}$ ein passend gewählter Fuß von $\mathfrak{G}$ ist. Es sei $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{P}$. Da $\mathfrak{F} < \mathfrak{S} < \mathfrak{D} \times \mathfrak{F}$ so ist nach DUDP Korollar 3 zu Satz 1.

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{F} \times (\mathfrak{S}, \mathfrak{D}) = \mathfrak{F} \times \mathfrak{P}.$$

Es ist also $\mathfrak{P}$ vom Range $r - 1$, wenn r der Rang von $\mathfrak{S}$ ist. Oder es ist der einzige Fuß $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{D}}$ kein bodenständiger Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$; $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{D}}$ ist gleichzeitig Sockel von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$; es gibt also keinen bodenständigen Fuß; es ist

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}, \qquad \mathfrak{S} < \mathfrak{D}.$$

Es ergibt sich also

Satz 1. *Eine einfüßige Faktorgruppe* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ *ist entweder bodenständig oder schwebend; sie kann nicht teilweise bodenständig sein. Wenn sie schwebend ist, so ist* $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}$ *vom Range r; wenn sie bodenständig ist, so ist* $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{P}$ *vom Range* $r - 1$.

Wenn $\mathfrak{P}$ vom Range $r - 1$, so war $\mathfrak{P} \times \mathfrak{F} = \mathfrak{S}$; es war $\mathfrak{P}$ der Komplementärfaktor eines Fußes im Sockel; ein solcher möge „Komplementärfuß" heißen. Stellt man $\mathfrak{P}$ nach MIU Satz 1 a als direktes Produkt von Füßen von $\mathfrak{G}$ dar, so entsteht durch Hinzufügung des einzigen Faktors $\mathfrak{F}$ eine direkte Zerlegung von $\mathfrak{S}$ in Füße. $\mathfrak{F}$ gehört einer bestimmten Kohärente an, alle übrigen Kohärenten sind in $\mathfrak{P}$ enthalten. Die Kohärente $\mathfrak{K}$, die $\mathfrak{F}$ enthält, ist als direkter Faktor von $\mathfrak{P}$ mit einer Untergruppe $(\mathfrak{K}, \mathfrak{P})$ vertreten, deren Rang um 1 erniedrigt ist. Alle Füße, die direkte Komplementärfaktoren von $\mathfrak{P}$ sein können, müssen derselben Kohärente $\mathfrak{K}$ angehören, d. h. untereinander kohärent sein, da die übrigen Kohärenten in $\mathfrak{P}$ enthalten sind. Ist $\mathfrak{F}$ von III. Art, so ist $\mathfrak{F}$ nur sich selbst kohärent, also gleich seiner Kohärente und $\mathfrak{P}$ ist das Produkt der übrigen

Kohärenten. Es ist also $\mathfrak{F}$ der einzige direkte Komplementärfaktor von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}$ der einzige direkte Komplementärfaktor von $\mathfrak{F}$. Dasselbe gilt, wenn $\mathfrak{F}$ von I. oder II. Art und gleich seiner Kohärente, d. h. keinem anderen Fuße kohärent ist.

Definition: *Eine invariante Untergruppe* $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$ *heiße ein „Stativ" von* $\mathfrak{G}$, *wenn für alle* $\mathfrak{X}$, *für die*

$$\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{D} < \mathfrak{X}, \quad \mathfrak{D} \neq \mathfrak{X}$$

ist, auch $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) \neq (\mathfrak{D}, \mathfrak{S})$ *gilt.*

Wir wollen von der Untergruppe $\mathfrak{X}$ sagen, sie ist „umfassender" als $\mathfrak{D}$, wenn $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{X}$ enthalten ist und die beiden Gruppen voneinander verschieden sind. Dann lautet die Definition des Stativs in anderen Worten:

Eine invariante Untergruppe einer Gruppe heißt ein Stativ, wenn jede umfassendere invariante Untergruppe auch einen umfassenderen Sockeldurchschnitt enthält.

Oder: *Eine invariante Untergruppe einer Gruppe heißt ein Stativ, wenn es keine umfassendere invariante Untergruppe mit demselben Sockeldurchschnitt gibt.*

Satz 2. *Jede invariante Untergruppe* $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$ *ist Untergruppe eines Stativs mit dem gleichen Sockeldurchschnitt.*

Beweis: Der Satz ist gewiß richtig, wenn $\mathfrak{D}$ selbst ein Stativ ist. Ist $\mathfrak{D}$ kein Stativ, so gibt es

$$\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{D} < \mathfrak{X}, \quad \mathfrak{D} \neq \mathfrak{X},$$

so daß

$$(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{X}, \mathfrak{S}).$$

Ist $\mathfrak{X}$ noch kein Stativ, so gehe man zu einer umfassenderen invarianten Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit dem gleichen Sockeldurchschnitt über. Das Verfahren muß, da $\mathfrak{G}$ nur endlich viele invariante Untergruppen hat, einmal abbrechen. Das sei der Fall bei der Gruppe $\mathfrak{V}$. Es muß $\mathfrak{V}$ ein Stativ sein, da andernfalls das Verfahren entgegen der Annahme nicht abbrechen würde.

Ist $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$, ist $\mathfrak{V}$ ein Stativ in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{V} > \mathfrak{D}$, $(\mathfrak{V}, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{D}, \mathfrak{S})$, so wollen wir sagen, $\mathfrak{V}$ ist ein Stativ „über" $\mathfrak{D}$. Über jeder invarianten Untergruppe gibt es also nach Satz 2 ein Stativ.

Korollar zu Satz 2: *Jedes Stativ über dem Sockel und jeder invarianten Untergruppe, die den Sockel enthält, ist die ganze Gruppe, als umfassendste Gruppe, die den Sockel enthält.*

Satz 3: *Eine Faktorgruppe* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ *ist dann und nur dann bodenständig, wenn die erzeugende invariante Untergruppe* $\mathfrak{D}$ *ein Stativ ist.*

Beweis: Es sei $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ eine bodenständige Faktorgruppe, d. h. ihr Sockel sei nach dem Korollar zu Hilfssatz 5 gleich $\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}}$, worin $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{D}, \mathfrak{S})$. Angenommen, $\mathfrak{D}$ wäre kein Stativ, so gäbe es

$$\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{X} > \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{X} \neq \mathfrak{D}, \quad (\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_1.$$

Dann ist nach Hilfssatz 3 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}_2) = \mathfrak{E}$, weil $\big((\mathfrak{X}, \mathfrak{S}), (\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S})\big) = (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) = \mathfrak{E}$; also ist $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{X} \times \mathfrak{S}_2$.

Betrachtet man $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2$ als Untergruppen des direkten Produktes $\mathfrak{X} \times \mathfrak{S}_2$, so ergibt sich

$$\left(\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}}, \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}}\right) = \frac{(\mathfrak{X}, \mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2)}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}.$$

Es ist

$$\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} \neq \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} ; \qquad \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} <_i \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}} .$$

Also besitzt $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ die zu $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}}$ teilerfremde invariante Untergruppe $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}}$; also kann der Sockel von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ nicht gleich $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}}$ sein. $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ wäre nicht bodenständig. Wenn also $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ eine bodenständige Faktorgruppe ist, muß $\mathfrak{D}$ ein Stativ sein.

Es sei umgekehrt $\mathfrak{D}$ ein Stativ. Angenommen, es sei $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ keine bodenständige Faktorgruppe, dann gäbe es eine Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} \neq \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$, so daß $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} <_i \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$, die zu $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}}$ teilerfremd ist; d. h. es ist

$$\left(\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} , \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}}\right) = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} ,$$

oder

$$(\mathfrak{X} , \mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2) = (\mathfrak{X} , \mathfrak{D}\,\mathfrak{S}) = \mathfrak{D} .$$

Dann ist

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) < (\mathfrak{X}, \mathfrak{D}\,\mathfrak{S}) = \mathfrak{D} .$$

da $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) < \mathfrak{S}$, ist

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) < (\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_1 .$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) < (\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) ,$$

also $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_1$. Da $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}$, ist $\mathfrak{D}$ kein Stativ, was der Voraussetzung widerspricht. Wenn $\mathfrak{D}$ ein Stativ ist, muß mithin $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ eine bodenständige Faktorgruppe sein.

Korollar 1 zu Satz 3: *Ist $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ einfüßig und bodenständig, so ist $\mathfrak{D}$ nach Satz 1 und Satz 3 ein Stativ über einem Komplementärfuß, abgekürzt ein „Maximalstativ".*

Korollar 2 zu Satz 3: *Ist $\mathfrak{D}$ ein Maximalstativ, so ist $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ einfüßig und bodenständig.*

Beweis: Die Faktorgruppe nach einem Stativ ist nach Satz 3 bodenständig. Ihr Sockel ist also gleich $\frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}}$. Es ist $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{P} \neq \mathfrak{S}$, weil $\mathfrak{P}$ nach der Definition als Komplementärfuß vom Range $r - 1$ ist. Also gibt es einen Fuß $\mathfrak{F}$, der nicht enthalten ist in $\mathfrak{P}$. $(\mathfrak{P}, \mathfrak{F}) = \mathfrak{E}$. Da aber $\mathfrak{P}$ vom Range $r - 1$, ist $\mathfrak{P} \times \mathfrak{F}$ vom Range r, mithin $\mathfrak{P} \times \mathfrak{F} = \mathfrak{S}$. Also ist der Sockel von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ gleich

$$\frac{\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{S}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}} ,$$

da $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}) = \mathfrak{E}$ nach Hilfssatz 3. Es ist aber $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$ Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ nach Hilfssatz 5. Also besteht der Sockel $\frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}}$ von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ nur aus einem Fuß. $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ ist einfüßig und bodenständig.

Die gewonnenen Sätze mögen auf subdirekte Darstellungen angewandt und es möge auch von „bodenständigen, zum Teil bodenständigen, schwebenden subdirekten Faktoren“ gesprochen werden.

Satz 4: *Ist*

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu} \sim \widehat{\mathfrak{B}}_\nu \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n ,$$

irgendeine bestimmte subdirekte Darstellung von $\mathfrak{G}$, *so kann ein schwebender Faktor unter allen Umständen weggelassen werden, d. h. er ist überzählig und kann diese Eigenschaft auch durch Weglassung oder Abänderung anderer Faktoren nicht verlieren.*

Beweis: Es mußte nach DUDP Satz 3, damit die Darstellung bestimmt wird,

$$\mathfrak{D}^* = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{E}$$

sein. Es sei nun $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ ein schwebender Faktor, also $\mathfrak{S} < \mathfrak{D}_1$. Wäre

$$(\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{D}^{**} \neq \mathfrak{E} ,$$

so wäre

$$\mathfrak{D}^* = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}^{**}) > (\mathfrak{S}, \mathfrak{D}^{**}) \neq \mathfrak{E}$$

nach Hilfssatz 1, also $\mathfrak{D}^* \neq \mathfrak{E}$. Es kann also nur $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{E}$ sein, wenn bereits $\mathfrak{D}^{**} = \mathfrak{E}$. Folglich kann man den subdirekten Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ weglassen, ohne daß die Darstellung aufhört, bestimmt zu sein. Der schwebende Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ ist überzählig. Bleibt durch Weglassung oder Abänderung anderer Faktoren die Bestimmtheit der Darstellung erhalten, so ist $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ auch in der neuen Zerlegung nach dem soeben Bewiesenen überzählig, kann also diese Eigenschaft nicht durch Weglassung oder Abänderung anderer Faktoren verlieren.

(Auch bodenständige und zum Teil bodenständige subdirekte Faktoren können in einer Zerlegung überzählig sein. Bei diesen kann es aber vorkommen, daß sie diese Eigenschaft durch Weglassung oder Abänderung anderer Faktoren verlieren.)

Korollar zu Satz 4: *Man kann in einer bestimmten Darstellung alle schwebenden subdirekten Faktoren gleichzeitig fortlassen.*

In einer ökonomischen subdirekten Darstellung einer Gruppe durch einfüßige Faktoren kann nach Satz 4 kein Faktor schwebend sein, also sind sie sämtlich bodenständig, mithin werden sie nach Korollar 1 zu Satz 3 durch Stative über Komplementärfüßen (Maximalstative) erzeugt. Der Durchschnitt der Komplementärfüße ist $\mathfrak{E}$; kein Durchschnitt von $n-1$ Komplementärfüßen darf gleich $\mathfrak{E}$ sein, weil sonst nach Hilfssatz 3 auch der Durchschnitt der $n-1$ Maximalstative $\mathfrak{E}$ wäre, also das n-te Maximalstativ überzählig wäre. Ein System von n Komplementärfüßen, deren Durchschnitt gleich $\mathfrak{E}$ ist, deren Durchschnitte zu je $n-1$ jedoch sämtlich $\neq \mathfrak{E}$ sind, heiße ein „unabhängiges System von Komplementärfüßen“. Wir können also sagen:

Satz 5: *Die Faktoren einer ökonomischen subdirekten Zerlegung in einfüßige Faktoren werden erzeugt durch Stative über einem unabhängigen System von Komplementärfüßen.*

Ob invariante Untergruppen untereinander teilerfremd sind oder nicht, hängt nach Hilfssatz 3 nur von ihren Sockeldurchschnitten ab. Hieraus folgt:

Korollar zu Satz 5: *Es darf in einer ökonomischen Darstellung einer Gruppe durch unzerlegbare subdirekte Faktoren jedes erzeugende Stativ durch ein anderes Stativ über demselben Komplementärfuß ersetzt werden.*

Aus Satz 5 ergibt sich, daß die Anzahl in einem unabhängigen System von Komplementärfüßen gleich dem Range des Sockels r ist. Es soll das aber auch direkt gezeigt werden.

Hilfssatz 6: *Es sei* $\mathfrak{S}_1 <_i \mathfrak{G}$; $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}$, *wo* $\mathfrak{S}$ *der Sockel von* $\mathfrak{G}$ *sei*; $\mathfrak{P} < \mathfrak{S}$ *sei ein Komplementärfuß. Es sei* $\mathfrak{S}_1$ *vom Range* r_1; $\mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{P})$ *sei vom Range* r_2. *Dann ist entweder* $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1$, $r_2 = r_1$; *oder es ist* $r_2 = r_1 - 1$.

Beweis: Die Aussagen über den Fall $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{P}$ sind selbstverständlich. Es sei also $\mathfrak{S}_1$ nicht enthalten in $\mathfrak{P}$. Dann ist $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3$ nach MIU Satz 1 a; $\mathfrak{S}_3 \neq \mathfrak{E}$. Es ist

$$\mathfrak{S}_1 \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \mathfrak{P} = \mathfrak{S}_3 \mathfrak{P} ,$$

da $\mathfrak{S}_2 < \mathfrak{P}$. Es ist $(\mathfrak{S}_3, \mathfrak{P}) = \mathfrak{E}$. Angenommen, das sei nicht der Fall. Wäre $(\mathfrak{S}_3, \mathfrak{P}) = \mathfrak{X} \neq \mathfrak{E}$, so wäre

$$\mathfrak{X} \times \mathfrak{S}_2 < \mathfrak{P} ; \qquad \mathfrak{X} \times \mathfrak{S}_2 < \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1 ;$$

also $\mathfrak{X} \times \mathfrak{S}_2 < (\mathfrak{P}, \mathfrak{S}_1)$, was der Definition $\mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{P}, \mathfrak{S}_1)$ widersprechen würde. Es ist also $(\mathfrak{S}_3, \mathfrak{P}) = \mathfrak{E}$, mithin $\mathfrak{S}_3 \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{P}$. Also ist $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{P}$ von höherem Range als $\mathfrak{P}$, also, da $\mathfrak{P}$ vom Range $r - 1$ ist, ist $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{P}$ vom Range r, folglich $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{P} = \mathfrak{S}$. Mithin muß der Rang von $\mathfrak{S}_3$ gleich 1 sein, $\mathfrak{S}_3$ ist ein Fuß. Also ist wegen $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3$ $\mathfrak{S}_2$ vom Range $r - 1$.

Satz 6: *Es sei* $\mathfrak{D}_\nu = (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\nu)$ *der Durchschnitt von* ν *Komplementärfüßen einer Gruppe. Es ist der Rang von* $\mathfrak{D}_\nu$

$$r_\nu \geqq r - \nu .$$

Wenn $\mathfrak{E} = (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n)$, *so ist* $n \geqq r$. *Es ist* $n = r$ *dann und nur dann, wenn sämtliche Durchschnitte zu je* $n - 1$ *Komplementärfüßen* $\neq \mathfrak{E}$ *sind. Diese sind dann Füße, deren direktes Produkt gleich dem Sockel* $\mathfrak{S}$ *ist.*

Beweis: Man bilde den Durchschnitt der ersten ν Komplementärfüße für $\nu = 1, 2, \ldots$ Entweder es ist

$$\mathfrak{D}_{\nu-1} = (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{\nu-1}) < \mathfrak{P}_\nu .$$

Dann ist

$$\mathfrak{D}_\nu = (\mathfrak{D}_{\nu-1}, \mathfrak{P}_\nu) = \mathfrak{D}_{\nu-1}$$

und es kann $\mathfrak{P}_\nu$ fortgelassen werden, ohne daß sich $\mathfrak{D}_n$ ändert. Wenn diese Beziehung nicht gilt, so hat $\mathfrak{D}_\nu$ gegenüber $\mathfrak{D}_{\nu-1}$ nach Hilfssatz 6 einen um 1 erniedrigten Rang. Es ist $r_1 = r - 1$, $r_\nu \geqq r - \nu$. Es kann also nur $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{E}$ sein, d. h. $r_n = 0$, wenn $n \geqq r$. Wenn kein $\mathfrak{P}_\nu$ weggelassen werden darf, so erniedrigt sich der Rang des Durchschnitts bei jedem Schritt um 1; es ist

$$r_\nu = r - \nu , \qquad r_r = 0 , \qquad (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r) = \mathfrak{E} .$$

Ist umgekehrt

$$(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r) = \mathfrak{E} ,$$

so kann es auch bei einer Prüfung in anderer Reihenfolge niemals vorkommen, daß ein $\mathfrak{P}_\nu$ weggelassen werden darf, weil sich sonst $r_r > r - r = 0$ ergeben würde. Der Rang eines Durchschnitts von $r - 1$ Komplementärfüßen muß 1 sein, weil er um 1 vermindert 0 ergeben muß. Die Durchschnitte zu je $r - 1$ Komplementärfüßen sind also Füße. Das Produkt der Füße ist ein direktes nach DUDP, dem letzten Teil von Korollar 1 zu Satz 3. Ihr Produkt ist vom Range r, also gleich $\mathfrak{S}$. Es sei

$$\mathfrak{F}_\nu = (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{\nu-1}, \mathfrak{P}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{P}_r)$$

Dann ist

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_r .$$

Hat man umgekehrt $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n) = \mathfrak{E}$, aber sämtliche Durchschnitte zu je $n - 1 \neq \mathfrak{E}$, so muß $n = r$ sein. Wäre nämlich $n > r$, so müßte bei der obigen Prüfung einmal der Fall eintreten, daß ein $\mathfrak{P}_\nu$ weggelassen werden kann. Dann wäre aber

$$(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{\nu-1}, \mathfrak{P}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{P}_n) = \mathfrak{E}$$

entgegen der Voraussetzung. Wenn sämtliche Durchschnitte zu je $n-1$ $\neq \mathfrak{E}$ sind, so ist mithin $n = r$.

Satz 7: *Es seien* $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots, \mathfrak{W}_r$ r *Stative über* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$, *worin die* $\mathfrak{P}_\nu$ *Komplementärfüße,* r *der Rang des Sockels der Gruppe sei. Ferner sei*

(1) $$(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r) = \mathfrak{E}.$$

$$\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \overset{\sim}{\nu} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{W}_\nu}$$

Behauptung: Die Zerlegung

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_r$$

ist eine ökonomische subdirekte Zerlegung in unzerlegbare Faktoren.

Beweis: Wegen (1) ist nach Hilfssatz 3 $(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots, \mathfrak{W}_r) = \mathfrak{E}$, also die Darstellung bestimmt. Die $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ sind einfüßig nach Korollar 2 zu Satz 3. Es ist kein Faktor überzählig, weil, wenn $\nu < r$,

$$(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\nu) \neq \mathfrak{E};$$

also

$$(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots, \mathfrak{W}_\nu) > (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\nu) \neq \mathfrak{E}.$$

Die Darstellung hört durch Weglassung irgendeines Faktors auf, bestimmt zu sein, ist also ökonomisch.

Korollar zu Satz 7: Nach DUDP Korollar 1 zu Satz 3 sind die Blockkomponenten der Darstellung

$$\widehat{\mathfrak{C}}_\nu \asymp \mathfrak{C}_\nu = (\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots, \mathfrak{W}_{\nu-1}, \mathfrak{W}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{W}_n)$$

Der einzige Fuß $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ war in $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ enthalten. Es war nach DUDP Korollar 2 zu Hilfssatz 1 und 2 $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ auch Fuß von $\widehat{\mathfrak{G}}$. Wenn $\mathfrak{S} \asymp \widehat{\mathfrak{S}}$, so ist also, da $(\mathfrak{W}_\nu, \mathfrak{S}) = \mathfrak{P}_\nu$,

$$\widehat{\mathfrak{F}}_\nu = (\widehat{\mathfrak{C}}_\nu, \widehat{\mathfrak{S}}) \asymp (\mathfrak{C}_\nu, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{\nu-1}, \mathfrak{P}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{P}_n) = \mathfrak{F}_\nu.$$

Ersetzt man also nach dem Korollar zu Satz 5 die $\mathfrak{W}_\nu$ durch andere Stative über denselben Komplementärfüßen $\widehat{\mathfrak{P}}_\nu$, so enthalten die Blockkomponenten $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ der neuen Zerlegung Füße $\widehat{\widehat{\mathfrak{F}}}_\nu$, die die gleichen Füße von $\mathfrak{G}$ darstellen wie die ursprüngliche Zerlegung. $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu \asymp \mathfrak{F}_\nu \asymp \widehat{\widehat{\mathfrak{F}}}_\nu$. Dies ist aber *nur* der Fall, wenn *sämtliche* Komplementärfüße $\mathfrak{P}_\nu$ festbleiben. Wenn man nur einen Komplementärfuß, z. B. $\mathfrak{P}_1$ festhält, sogar, wenn man das Maximalstativ $\mathfrak{W}_1$ über $\mathfrak{P}_1$ festhält, kann sich der zu $\mathfrak{P}_1$ komplementäre Fuß $\mathfrak{F}_1$ ändern. Es braucht nur $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{S}$ zu sein.

§ 2. Die Methode der fortgesetzten meromorphen Zerlegung.

Es möge eine spezielle Methode behandelt werden, eine Gruppe $\mathfrak{G}$ in einfüßige ökonomische subdirekte Faktoren zu zerlegen. Es sei $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$.

(1) $$\mathfrak{S} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_r$$

sei eine Darstelluung von $\mathfrak{S}$ als direktes Produkt von Füßen von $\mathfrak{G}$. Man stelle zunächst $\mathfrak{G}$ als meromorphes Produkt von r Faktoren dar und benutze die direkte Zerlegung (1) von $\mathfrak{S}$ als Block der meromorphen Zerlegung auf Grund des Satzes 5 DUDP. Es ist

$$\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \overset{\sim}{\nu} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\nu};$$

$$\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_{\nu-1} \times \mathfrak{F}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{F}_r;$$

$$\widehat{\mathfrak{F}}_\nu \sim_\nu \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{P}_\nu} = \frac{\mathfrak{P}_\nu \times \mathfrak{F}_\nu}{\mathfrak{P}_\nu} \; ;$$

$$(2) \qquad \mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{F}}_1} \times \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_2}{\widehat{\mathfrak{F}}_2} \times \cdots \times \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_r}{\widehat{\mathfrak{F}}_r} \; .$$

Jeden Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ zerlege man in der gleichen Weise, wofern er nicht einfüßig ist. Das Verfahren möge „Methode der fortgesetzten meromorphen Zerlegung" heißen. Nach Hilfssatz 5 ist

$$\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{P}_\nu} = \frac{\mathfrak{P}_\nu \times \mathfrak{F}_\nu}{\mathfrak{P}_\nu}$$

Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\nu}$, also $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ Fuß von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. Es sollen nur solche Zerlegungen des Sockels von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ benutzt werden, in denen der einzige bodenständige Fuß $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ vorkommt. Es sei

$$(3) \qquad \widehat{\mathfrak{S}}_\nu = \widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,1} \times \widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,2} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,s_\nu}$$

der Sockel von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, worin $\widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,1} = \widehat{\mathfrak{F}}_\nu$.

$$(4) \qquad \widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu} = \widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,1} \times \widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,2} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,\mu-1} \times \widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,\mu+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,s_\nu} \qquad \mu = 1, 2, \ldots, s_\nu$$

seien die Komplementärfüße der Zerlegung von $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu$.

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{\nu,\mu} \sim_{\nu,\mu} \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu}} \; ;$$

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{F}}}_{\nu,\mu} \sim_{\nu,\mu} \frac{\widehat{\mathfrak{S}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu}} = \frac{\widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu} \times \widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,\mu}}{\widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu}} \; ;$$

$$(5) \qquad \widehat{\mathfrak{B}}_\nu \lessapprox \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_\nu = \frac{\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{\nu,1}}{\widehat{\widehat{\mathfrak{F}}}_{\nu,1}} \times \frac{\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{\nu,2}}{\widehat{\widehat{\mathfrak{F}}}_{\nu,2}} \times \cdots \times \frac{\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{\nu,s_\nu}}{\widehat{\widehat{\mathfrak{F}}}_{\nu,s_\nu}} \; .$$

Es ist für $\mu = 1, 2, \ldots, s_\nu$

$$\widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu} < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu \sim_\nu \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\nu} \; .$$

Es sei

$$(6) \qquad \widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu} \sim_\nu \frac{\mathfrak{Q}_{\nu,\mu}}{\mathfrak{P}_\nu} < \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\nu} \; .$$

Es ist $\widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu} <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, also $\mathfrak{Q}_{\nu,\mu} <_i \mathfrak{G}$. Es sei, da ja $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ benutzt werden soll, $\widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,1} = \widehat{\mathfrak{F}}_\nu$. Für $\mu \geqq 2$ ist $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu = \widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,1} < \widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu}$. Es ist

$$\widehat{\mathfrak{F}}_\nu \sim_\nu \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{P}_\nu} \; ; \qquad \widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,1} < \widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu} \; ;$$

also ist

$$(7) \qquad \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{P}_\nu} < \frac{\mathfrak{Q}_{\nu,\mu}}{\mathfrak{P}_\nu} \; ;$$

$$(8) \qquad \mathfrak{S} < \mathfrak{Q}_{\nu,\mu} \qquad \text{für} \qquad \mu = 2, 3, \ldots, s_\nu .$$

Dadurch, daß man in der meromorphen Darstellung (2) von $\mathfrak{G}$ den Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ durch seine meromorphe Darstellung (5) ersetzt, entsteht eine subdirekte, im allgemeinen nicht mehr meromorphe Darstellung von $\mathfrak{G}$.

Der Ersatz von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ durch seine Darstellung bedeutet folgendes:

Man lasse bei jedem Elemente von $\mathfrak{G}$ diejenige Komponente fort, die durch Angabe

des Komplexes der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\nu} \overset{\sim}{\nu} \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ entsteht. Dafür schreibe man neue Komponenten, die durch Angabe der Komplexe der Faktorgruppen der

$$\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu}} \overset{\sim}{\nu,\mu} \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{\nu,\mu}$$

entstehen. Es ist aber

$$\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu}} \overset{\sim}{\nu} \frac{\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\nu}\right)}{\left(\frac{\mathfrak{D}_{\nu,\mu}}{\mathfrak{P}_\nu}\right)} \sim \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_{\nu,\mu}} .$$

Die neuen Komponenten sind also die Angaben der Komplexe der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_{\nu,\mu}}$. Für $\mu \geqq 2$ war aber $\mathfrak{S} < \mathfrak{D}_{\nu,\mu}$; also ist die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_{\nu,\mu}}$ eine schwebende und kann nach Satz 4 fortgelassen werden. Es bleibt also nur

$$\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,1}} \overset{\sim}{\nu,1} \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{\nu,1}$$

zu berücksichtigen. Jedes $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ für $\nu = 1, 2 \ldots, r$ liefert also schlielßich nur ein $\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{\nu,1}$, die Anzahl der Faktoren wird also nicht vermehrt. $\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{\nu,1}$ hat den einzigen in $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ bodenständigen Fuß $\widehat{\widehat{\mathfrak{F}}}_{\nu,1}$. Das Verfahren muß, da die Ordnungen der Faktoren fortgesetzt verkleinert werden, einmal abbrechen; d. h. zum Schluß erhält man nur noch einfüßige Faktoren.

Satz 8: *Es wird behauptet*:

A) *Das beschriebene Verfahren liefert, unter Weglassung der schwebenden Faktoren, wenn es abbricht, eine ökonomische Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare Faktoren.*

B) *Jeder Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ der ursprünglichen meromorphen Zerlegung liefert genau einen Faktor der ökonomischen Zerlegung.*

C) *Die ökonomische Zerlegung liefert die ursprüngliche direkte Zerlegung des Sockels in Füße.*

Beweis: Die drei Behauptungen sind trivial für einfüßige Gruppen. Der Beweis wird durch Induktion geführt. Die drei Behauptungen seien bereits bewiesen für Gruppen niedrigerer Ordnung als $\mathfrak{G}$, sind also speziell angewendet auf die Faktoren $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ bereits als bewiesen anzusehen. Es sei also

$$\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \overset{\sim}{\nu} \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_\nu < \widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,1} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,2} \times \cdots \times \widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,m}$$

die gefundene ökonomische Zerlegung von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ in unzerlegbare Faktoren, worin die $\widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,\mu}$ die Komponenten von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ seien. Es sei

$$\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{W}}_{\nu,\mu}} \overset{\sim}{\nu,\mu} \widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,\mu} .$$

Hierin sei $\widehat{\mathfrak{W}}_{\nu,\mu}$ das erzeugende Maximalstativ von $\widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,\mu}$ in $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu$ war der Sockel von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$.

$$(\widehat{\mathfrak{S}}_\nu, \widehat{\mathfrak{W}}_{\nu,\mu}) = \widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu} \overset{\sim}{\nu} \frac{\mathfrak{D}_{\nu,\mu}}{\mathfrak{P}_\nu} .$$

Hierin sind nach (6) die $\widehat{\mathfrak{P}}_{\nu,\mu}$, da für $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ die Behauptung (*C*) bereits gilt, die ursprünglichen durch (4) definierten Produkte. Wenn $\mu \neq 1$, so war nach (8) $\mathfrak{S} < \mathfrak{D}_{\nu,\mu}$.

Der Faktor ist also für die Darstellung von $\mathfrak{G}$ ein schwebender und kann weggelassen werden. Nach Weglassung aller dieser $\widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,\mu}$, wo $\mu \neq 1$, liefert also jedes $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ höchstens einen einfüßigen subdirekten, in $\mathfrak{G}$ bodenständigen Faktor $\widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,1}$. Die Darstellung ist noch bestimmt und kann daher durch sukzessive Streichung überzähliger Faktoren zu einer ökonomischen Darstellung gemacht werden. Es müssen dann r Faktoren übrigbleiben. Da aber die Anzahl der bodenständigen $\widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,1}$ bereits $\leqq r$ war, so kann kein Faktor gestrichen werden und sämtliche $\widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,1}$ sind bodenständig. Die $\widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,1}$ bilden bereits eine ökonomische Zerlegung von $\mathfrak{G}$. Damit sind die Behauptungen A) und B) für $\mathfrak{G}$ bewiesen.

Es sei

$$\widehat{\mathfrak{W}}_{\nu,1} \sim_\nu \frac{\mathfrak{V}_{\nu,1}}{\mathfrak{P}_\nu} .$$

Dann ist $\mathfrak{V}_{\nu,1}$ das erzeugende Stativ des Faktors $\widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,1}$ in der Darstellung von $\mathfrak{G}$. Man setze

$$\mathfrak{P}'_\nu = (\mathfrak{V}_{\nu,1}, \mathfrak{S}) .$$

Es ist, da $\mathfrak{P}_\nu < \mathfrak{S}$, auch $\mathfrak{P}_\nu < \mathfrak{P}'_\nu$. $\mathfrak{P}_\nu$ ist vom Range $r-1$. Wäre nun $\mathfrak{P}'_\nu \neq \mathfrak{P}_\nu$, so wäre $\mathfrak{P}'_\nu$ von größerem Range als $\mathfrak{P}_\nu$, also $\mathfrak{P}'_\nu$ vom Range r, d. h. $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}'_\nu < \mathfrak{V}_{\nu,1}$. Der Faktor $\widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,1}$ wäre also ein schwebender Faktor von $\mathfrak{G}$. Da aber gezeigt worden war, daß $\widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{\nu,1}$ ein bodenständiger Faktor von $\mathfrak{G}$ ist, führt die Annahme $\mathfrak{P}'_\nu \neq \mathfrak{P}_\nu$ zu einem Widerspruch. Also ist $\mathfrak{P}'_\nu = \mathfrak{P}_\nu$. Damit ist aber gezeigt, daß die ökonomische Zerlegung

$$\mathfrak{G} < \widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{1,1} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{2,1} \times \cdots \times \widehat{\widehat{\mathfrak{L}}}_{r,1}$$

wieder die ursprüngliche Zerlegung (1) des Sockels liefert. Auch die Behauptung C) ist damit für $\mathfrak{G}$ bewiesen.

Unser nächstes Ziel ist es, zu beweisen, daß man nach der angegebenen Methode jede mögliche ökonomische Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare Faktoren erhalten kann. Dazu brauchen wir einige weitere Hilfssätze.

Hilfssatz 7: *Es sei*

$$\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G} ; \qquad \mathfrak{V} <_i \mathfrak{G} ; \qquad \mathfrak{D} < \mathfrak{V} .$$

$\mathfrak{V}$ *sei ein Stativ in* $\mathfrak{G}$.

Behauptung: $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{D}}$ *ist Stativ in* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$.

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{V} < \mathfrak{X} <_i \mathfrak{G} ; \qquad \mathfrak{X} \neq \mathfrak{V} ;$$

dann ist nach der Definition des Stativs, wenn $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$ ist, $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) \neq (\mathfrak{V}, \mathfrak{S})$. Es sei $\mathfrak{F} < (\mathfrak{X}, \mathfrak{S})$ ein Fuß von $\mathfrak{G}$, der nicht enthalten sei in $(\mathfrak{V}, \mathfrak{S})$. Dann ist $(\mathfrak{F}, (\mathfrak{D}, \mathfrak{S})) = \mathfrak{E}$, also nach Hilfssatz 3 auch $(\mathfrak{F}, \mathfrak{D}) = \mathfrak{E}$; dann ist nach Hilfssatz 5 $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$ Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$. Da $\mathfrak{D} \times \mathfrak{F} < \mathfrak{X}$, so ist $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}} < \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}}$, aber $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$ nicht enthalten in $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{D}}$, weil sonst auch $\mathfrak{F} < \mathfrak{V}$ wäre entgegen der Definition von $\mathfrak{F}$. Es ist also für $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{D}}$ gezeigt, daß jede umfassendere invariante Untergruppe $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}}$ von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ mindestens einen

Fuß $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$ von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ enthält, der nicht in $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{D}}$ enthalten ist; also ist $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{D}}$ Stativ in $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$, was zu beweisen war.

Hilfssatz 8: *Es sei* $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{V}$ *ein Stativ über* $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$ *der Sockel von* $\mathfrak{G}$; $\frac{\overline{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{D}}$ *sei der Sockel von* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$.

Behauptung: *Es ist*

$$\frac{\overline{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}} \times \frac{(\overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{V})}{\mathfrak{D}}.$$

Beweis: Es sei

$$(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{V}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_1 ; \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 .$$

Nach dem Korollar zu Hilfssatz 5 war der bodenständige Sockel von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}} < \frac{\overline{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{D}} .$$

Es ist

$$(\mathfrak{S}_2, \mathfrak{V}) < (\mathfrak{S}_2, \mathfrak{V}, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_1) = \mathfrak{E} ;$$

also $\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{V} \times \mathfrak{S}_2$. Man betrachte den Durchschnitt

$$\big(\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2 , \ (\overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{V})\big) < (\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2, \mathfrak{V}) < \mathfrak{V}$$

als Untergruppe von $\mathfrak{V} \times \mathfrak{S}_2$. Die $\mathfrak{S}_2$-Komponenten der Elemente des Durchschnitts sind gleich E. Also bleiben nur die Elemente von $\mathfrak{D} < \mathfrak{V}$. Also ist $(\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2, \mathfrak{V}) < \mathfrak{D}$, mithin

$$\Big(\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}} , \ \frac{(\overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{V})}{\mathfrak{D}}\Big) = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} .$$

Das Produkt der beiden Faktorgruppen ist also ein direktes. Angenommen, es wäre die Behauptung nicht richtig, dann wäre

$$\frac{\overline{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}} \times \frac{(\overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{V})}{\mathfrak{D}} \times \frac{\overline{\mathfrak{S}}_3}{\mathfrak{D}} ,$$

worin $\overline{\mathfrak{S}}_3 \neq \mathfrak{D}$. Es soll gezeigt werden, daß dann $\mathfrak{V}$ kein Stativ wäre, weil

$$(\mathfrak{V}\overline{\mathfrak{S}}_3, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{V}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_1$$

wäre und $\mathfrak{V}\overline{\mathfrak{S}}_3 \neq \mathfrak{V}$. Da $\mathfrak{S} < \overline{\mathfrak{S}}$, so ist

$$(\mathfrak{V}\overline{\mathfrak{S}}_3, \mathfrak{S}) < (\mathfrak{V}\overline{\mathfrak{S}}_3, \overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S}).$$

Es sei $V < \mathfrak{V}$, $\overline{S}_3 < \overline{\mathfrak{S}}_3$; wenn $V\overline{S}_3 = \overline{S} < \overline{\mathfrak{S}}$, so ist, da $\overline{S}_3 < \overline{\mathfrak{S}}_3 < \overline{\mathfrak{S}}$, auch $V = \overline{S} \cdot \overline{S}_3^{-1} < \overline{\mathfrak{S}}$; also

$$(\mathfrak{V}\overline{\mathfrak{S}}_3, \overline{\mathfrak{S}}) < \big((\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{S}}) \cdot \overline{\mathfrak{S}}_3 , \ \overline{\mathfrak{S}}\big) ;$$

mithin

$$(\mathfrak{V}\overline{\mathfrak{S}}_3 , \ \overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S}) < \big((\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{S}}) \cdot \overline{\mathfrak{S}}_3 , \ \overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S}\big) = \big((\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{S}}) \cdot \overline{\mathfrak{S}}_3\big) ; \ \mathfrak{S} < \big((\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{S}}) \cdot \overline{\mathfrak{S}}_3 , \ \mathfrak{D}\mathfrak{S}\big) = \mathfrak{D}.$$

Die letzte Gleichung gilt mit Rücksicht auf die direkte Zerlegung von $\frac{\overline{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{D}}$. Andrerseits ist

$$(\mathfrak{V}\overline{\mathfrak{S}}_3 , \ \mathfrak{S}) < \mathfrak{S} ,$$

mithin

$$(\mathfrak{V}\,\overline{\mathfrak{S}}_3, \mathfrak{S}) < (\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_1 .$$

Es kann auch nicht $\mathfrak{V}\,\overline{\mathfrak{S}}_3 = \mathfrak{V}$ sein; dann wäre nämlich $\overline{\mathfrak{S}}_3 < \mathfrak{V}$, also wegen $\overline{\mathfrak{S}}_3 < \overline{\mathfrak{S}}$ auch $\overline{\mathfrak{S}}_3 < (\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{S}})$ oder $\frac{\overline{\mathfrak{S}}_3}{\mathfrak{D}} < \frac{(\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{S}})}{\mathfrak{D}}$. Das würde aber $\left(\frac{(\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{S}})}{\mathfrak{D}}, \frac{\overline{\mathfrak{S}}_3}{\mathfrak{D}}\right) = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$ widersprechen. Es ist somit $\mathfrak{V}\,\overline{\mathfrak{S}}_3 \neq \mathfrak{V}$. Wenn also $\frac{\overline{\mathfrak{S}}_3}{\mathfrak{D}} \neq \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$, so ist $\mathfrak{V}$ kein Stativ. Mithin gilt die Behauptung.

Hilfssatz 9: *Es sei $\mathfrak{W}$ ein Maximalstativ von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$, $(\mathfrak{W}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{P}$.*

Behauptung: Es ist $\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{P}}$ Maximalstativ in $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$.

Beweis: Es ist $\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{P}}$ ein Stativ in $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$ nach Hilfssatz 7. Es sei $\frac{\overline{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{P}}$ der Sockel von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$. Es bleibt zu zeigen, daß der Durchschnitt

$$\left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{P}}, \frac{\overline{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{P}}\right) = \frac{(\mathfrak{W}, \overline{\mathfrak{S}})}{\mathfrak{P}}$$

ein Komplementärfuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$ ist. Es ist nach Hilfssatz 8

$$\frac{\overline{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{P}} \times \frac{(\overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{W})}{\mathfrak{P}} , \tag{1}$$

worin bereits $\mathfrak{P}\,\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$ gesetzt ist. Da $\mathfrak{P}$ ein Komplementärfuß von $\mathfrak{G}$ ist, gibt es einen Fuß $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{S} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{F}$. Wendet man Hilfssatz 5 an, indem man für die dortige invariante Untergruppe $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{P}$ einsetzt, so erhält man, daß $\frac{\mathfrak{P} \times \mathfrak{F}}{\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{P}}$ Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$ ist. Beachtet man, daß $\overline{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{W}$, also auch $(\overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{W})$ invariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind, so liefert (1), daß

$$\frac{(\overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{W})}{\mathfrak{P}} <_i \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$$

der Komplementärfaktor eines Fußes $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{P}}$ von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$ bei der Darstellung des Sockels $\frac{\overline{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{P}}$ ist; d. h. $\frac{(\overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{W})}{\mathfrak{P}}$ ist Komplementärfuß in $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$, also ist $\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{P}}$ Maximalstativ in $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$.

Satz 9: *Jede ökonomische Zerlegung einer Gruppe in unzerlegbare subdirekte Faktoren kann durch die Methode der fortgesetzten meromorphen Zerlegung erhalten werden.*

Beweis: Es seien $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots, \mathfrak{W}_r$ Maximalstative einer Gruppe $\mathfrak{G}$; ihre Anzahl sei gleich dem Range des Sockels r; $(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots, \mathfrak{W}_r) = \mathfrak{E}$. Man setze $(\mathfrak{W}_\nu, \mathfrak{S}) = \mathfrak{P}_\nu$, also $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r) = \mathfrak{E}$.

Die $\mathfrak{P}_\nu$ bilden ein unabhängiges System von Komplementärfüßen. Man setze

$$(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{\nu-1}, \mathfrak{P}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{P}_r) = \mathfrak{F}_\nu .$$

Dann ist nach Satz 6

$$\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_r = \mathfrak{S} .$$

Man setze für $\nu = 1, 2, \ldots, r$

$$\mathfrak{B}_\nu \sim_\nu \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\nu} .$$

Es ist $(\mathfrak{F}_\nu, \mathfrak{P}_\nu) = \mathfrak{E}$, also nach Hilfssatz 3 $(\mathfrak{F}_\nu, \mathfrak{W}_\nu) = \mathfrak{E}$.

Der Beweis wird durch Induktion geführt. Für einfüßige Gruppen ist er trivial, weil für diese die einzige Darstellung die ganze unzerlegte Gruppe ist. Der Satz sei bereits bewiesen für alle Gruppen von niedrigerer Ordnung als $\mathfrak{G}$. Der Satz ist also bereits bewiesen angewendet auf die Gruppe $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. Nun ist aber nach Hilfssatz 9. $\frac{\mathfrak{W}_\nu}{\mathfrak{P}_\nu}$ Maximalstativ in $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\nu}$; also, da sich die Eigenschaft, Maximalstativ zu sein, auf isomorphe Gruppen überträgt, ist, wenn

$$\frac{\mathfrak{W}_\nu}{\mathfrak{P}_\nu} \overset{\nu}{\sim} \widehat{\mathfrak{W}}_{\nu,1} <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu ,$$

$\widehat{\mathfrak{W}}_{\nu,1}$ auch Maximalstativ von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. Es gibt also eine ökonomische Zerlegung von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ in unzerlegbare subdirekte Faktoren, die als erzeugende invariante Untergruppe des einen Faktors $\widehat{\mathfrak{W}}_{\nu,1}$ enthält; die übrigen erzeugenden invarianten Untergruppen sind Maximalstative über einem unabhängigen System von Komplementärfüßen von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, die sämtlich den einzigen bodenständigen Fuß $\widehat{\mathfrak{F}}_{\nu,1} = \widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ enthalten sollten. Auf diese Faktoren kommt es übrigens nicht an, da sie ja alle für die Darstellung von $\mathfrak{G}$ als schwebende Faktoren wegfallen. Diese ökonomische Zerlegung von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ in subdirekte unzerlegbare Faktoren läßt sich nach dem für $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ bereits bewiesenen Satze durch Anwendung des Verfahrens der fortgesetzten meromorphen Zerlegung auf $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ erhalten. Der durch $\widehat{\mathfrak{W}}_{\nu,1}$ erzeugte Faktor von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ hat, als Faktor von $\mathfrak{G}$ betrachtet, $\mathfrak{W}_\nu$ zur erzeugenden invarianten Untergruppe. Da dies für sämtliche $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ gilt, kann man also die vorgegebene subdirekte ökonomische Zerlegung von $\mathfrak{G}$ mit den erzeugenden Maximalstativen $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots, \mathfrak{W}_r$ durch geeignete Anwendung des Verfahrens der fortgesetzten meromorphen Zerlegung erhalten, was zu beweisen war.

§ 3. Die verallgemeinerten ökonomischen Zerlegungen.

Definition: Eine Zerlegung einer Gruppe in subdirekte Faktoren, die *nicht* unzerlegbar zu sein brauchen, soll „ökonomisch" heißen, wenn kein Faktor überzählig ist, und wenn kein Faktor sich „kürzen" läßt. Darunter möge folgendes verstanden werden:

Es sei

$$\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \overset{\nu}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}$$

ein Faktor des subdirekten Produktes. Es sei ferner

$$\widehat{\mathfrak{E}} \neq \widehat{\mathfrak{U}}_\nu <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu ;$$

$$\widehat{\mathfrak{U}}_\nu \overset{\nu}{\sim} \frac{\overline{\mathfrak{U}}_\nu}{\mathfrak{D}_\nu} ;$$

d. h. $\overline{\mathfrak{U}}_\nu \neq \mathfrak{D}_\nu$. Man setze

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_\nu \overset{\nu}{\sim}' \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{U}}_\nu} .$$

Das Zeichen $\overset{\nu}{\sim}'$ dient zur Unterscheidung des Isomorphismus von $\overset{\nu}{\sim}$. Man ersetze nun für jedes Element $G < \mathfrak{G}$ die Angabe des zugehörigen Komplexes

$$G\mathfrak{D}_\nu \overset{\nu}{\sim} \widehat{B}_\nu < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$$

durch die Angabe

$$G\widehat{\mathfrak{U}}_\nu \sim \widehat{\widehat{B}}_\nu < \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_\nu ,$$

die man durch die Isomorphismen

$$G\,\widehat{\mathfrak{U}}_\nu \sim_\nu \widehat{B}_\nu\,\widehat{\mathfrak{U}}_\nu \overset{\prime}{\sim}_\nu \widehat{\widehat{B}}_\nu < \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_\nu$$

erhält. Die Angabe ist ungenauer, da früher die Elemente von $\mathfrak{D}_\nu$, jetzt noch mehr Elemente, nämlich die von $\overline{\mathfrak{U}}_\nu$ mit dem Einheitselemente bezeichnet werden. Der Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ heißt kürzbar, wenn $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ durch das ungenauere $\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_\nu$ ersetzt werden kann, ohne daß die Darstellung aufhört, bestimmt zu sein.

Die Überzähligkeit ist als der stärkste Fall der Kürzbarkeit anzusehen. Wenn nämlich

$$\widehat{\mathfrak{U}}_\nu = \widehat{\mathfrak{B}}_\nu\,, \quad \text{also} \quad \overline{\mathfrak{U}}_\nu = \mathfrak{G}\,, \quad \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_\nu = \widehat{\widehat{\mathfrak{E}}}\,,$$

so besagt die Faktorgruppe für die Unterscheidung der Elemente nichts mehr; der Faktor $\widehat{\widehat{\mathfrak{E}}}$ kann weggelassen werden.

Betrachtet man die erzeugenden invarianten Untergruppen $\mathfrak{D}_\nu$, wobei

$$\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \sim_\nu \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}\,; \qquad (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{E}\,,$$

so heißt $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ kürzbar, wenn sich $\mathfrak{D}_\nu$ durch die umfassendere invariante Untergruppe $\overline{\mathfrak{U}}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ ersetzen läßt, so daß auch noch

$$(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{\nu-1}, \overline{\mathfrak{U}}_\nu, \mathfrak{D}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{E}\,.$$

Ein Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ ist also dann und nur dann unkürzbar, wenn der Durchschnitt sämtlicher $\mathfrak{D}_\mu$ aufhört, gleich $\mathfrak{E}$ zu sein, sowie man $\mathfrak{D}_\nu$ durch eine umfassendere invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ersetzt. Eine Darstellung heißt ökonomisch, wenn der Durchschnitt der $\mathfrak{D}_\nu$ aufhört, gleich $\mathfrak{E}$ zu sein, sowie irgendein $\mathfrak{D}_\nu$ durch eine umfassendere invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ersetzt wird.

Daß die früher definierten ökonomischen Zerlegungen in unzerlegbare Faktoren auch im neuen Sinne ökonomisch sind, wird weiter unten gezeigt werden.

Satz 10: *Wenn* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \sim_\nu \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}$ *unkürzbar ist, so ist* $\mathfrak{D}_\nu$ *ein Stativ.*

Beweis: Es ist $\mathfrak{D}_\nu$ zum Durchschnitt der übrigen $\mathfrak{D}_\mu$ teilerfremd. Nach Hilfssatz 3 gilt das auch noch, wenn man $\mathfrak{D}_\nu$ durch eine umfassendere invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ über dem gleichen Sockeldurchschnitt ersetzt; insbesondere wenn man $\mathfrak{D}_\nu$ durch ein Stativ über $\mathfrak{D}_\nu$ ersetzt. Wenn $\mathfrak{D}_\nu$ kein Stativ ist, ist $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \sim_\nu \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}$ stets kürzbar. Wenn also $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ unkürzbar ist, so ist $\mathfrak{D}_\nu$ ein Stativ.

Korollar zu Satz 10: Wenn sämtliche $\mathfrak{D}_\nu$ Stative sind, so ist das im allgemeinen *noch nicht* hinreichend dafür, daß die Zerlegung ökonomisch ist.

Satz 11: *Wenn* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \sim_\nu \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}$ *ein Faktor einer subdirekten Zerlegung von* $\mathfrak{G}$, $\quad \widehat{\mathfrak{C}}_\nu <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, *die Blockkomponente von* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, $\quad \widehat{\mathfrak{U}}_\nu <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *eine invariante Untergruppe von* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, *durch die sich* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *kürzen läßt, dann ist*

$$(\widehat{\mathfrak{U}}_\nu, \widehat{\mathfrak{C}}_\nu) = \widehat{\mathfrak{E}}\,.$$

Beweis: Wäre

$$\widehat{\mathfrak{x}}_\nu = (\widehat{\mathfrak{U}}_\nu, \widehat{\mathfrak{C}}_\nu) \neq \widehat{\mathfrak{E}}\,,$$

so würden für ein Element $\widehat{X}_\nu < \widehat{\mathfrak{x}}_\nu$, als Blockkomponente in $\widehat{\mathfrak{G}}$, alle Komponenten $\widehat{X}_\mu = \widehat{E}$

sein für $\mu \neq \nu$. Setzt man $\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{U}}_\nu} \overset{\nu}{\sim} \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_\nu$, so wird $\widehat{X}_\nu$ die $\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_\nu$-Komponente $\widehat{\widehat{E}}$ erhalten, da $\widehat{\mathfrak{x}}_\nu < \widehat{\mathfrak{U}}_\nu$. Das Element $\widehat{X}_\nu$ würde nach der Kürzung in

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu-1} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_\nu \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{B}_n$$

der Einheit zugeordnet werden. Es würde nur eine Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ dargestellt werden; die Darstellung wäre unbestimmt. Die Kürzung ist also nicht erlaubt. Es ist mithin nur dann eine Kürzung erlaubt, wenn $(\widehat{\mathfrak{U}}_\nu, \widehat{\mathfrak{C}}_\nu) = \widehat{\mathfrak{E}}$.

Umkehrung zu Satz 11: *Wenn alle Buchstaben die gleiche Bedeutung haben wie in Satz* 11, *ist, wenn* $(\widehat{\mathfrak{U}}_\nu, \widehat{\mathfrak{C}}_\nu) = \widehat{\mathfrak{E}}$, *immer* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *durch* $\widehat{\mathfrak{U}}_\nu$ *kürzbar.*

Beweis: Man fasse alle subdirekten Faktoren $\widehat{\mathfrak{B}}_\mu$ außer $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ zu einem einzigen direkten Faktor zusammen.

$$\widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu-1} \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n = \widehat{\mathfrak{A}}_\nu .$$

Die $\widehat{\mathfrak{A}}_\nu$-Komponente von $\widehat{\mathfrak{G}}$ heiße $\widehat{\mathfrak{K}}_\nu$. Als Untergruppe eines direkten Produktes zweier Faktoren ist $\widehat{\mathfrak{G}}$ ein meromorphes Produkt nach DUDP Satz 1:

$$\widehat{\mathfrak{G}} = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{C}}_\nu} \overset{\times}{\sim} \frac{\widehat{\mathfrak{K}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{D}}_\nu} .$$

(Übrigens ist $\widehat{\mathfrak{D}}_\nu \asymp \mathfrak{D}_\nu$, die Gruppe der Elemente, deren $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$-Komponente gleich $\widehat{E}$ ist, was aber für den Beweis nicht gebraucht wird.) Nach DUD Korollar 1 a zu Satz 1 ist

$$\operatorname{Ord} \widehat{\mathfrak{G}} = \operatorname{Ord} \widehat{\mathfrak{K}}_\nu \cdot \operatorname{Ord} \widehat{\mathfrak{C}}_\nu .$$

Ist nun $(\widehat{\mathfrak{C}}_\nu, \widehat{\mathfrak{U}}_\nu) = \widehat{\mathfrak{E}}$, so ist

$$\widehat{\mathfrak{C}}_\nu \cdot \widehat{\mathfrak{U}}_\nu = \widehat{\mathfrak{C}}_\nu \times \widehat{\mathfrak{U}}_\nu ; \qquad \frac{\widehat{\mathfrak{C}}_\nu \times \widehat{\mathfrak{U}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{U}}_\nu} \sim \widehat{\mathfrak{C}}_\nu .$$

Jedes Element von $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ gehört einem anderen Komplex von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ nach $\widehat{\mathfrak{U}}_\nu$ an. Durch die Kürzung nach $\widehat{\mathfrak{U}}_\nu$ bleibt also Ord $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ ungeändert; ebenso hat die Kürzung auf $\widehat{\mathfrak{K}}_\nu$ also auf Ord $\widehat{\mathfrak{K}}_\nu$ keinen Einfluß; also bleibt Ord $\widehat{\mathfrak{G}}$ ungeändert, verkleinert sich mithin nicht; die Darstellung bleibt bestimmt; die Kürzung ist also zulässig.

Korollar 1 zu Satz 11: *Ein Faktor* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *einer subdirekten Darstellung von* $\mathfrak{G}$ *ist dann und nur dann unkürzbar, wenn* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *keine zur Blockkomponente* $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *teilerfremde invariante Untergruppe besitzt, d. h. wenn* $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu < \widehat{\mathfrak{C}}_\nu$, *wo* $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu$ *der Sockel von* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$; *die Zerlegung ist dann und nur dann ökonomisch, wenn für sämtliche Faktoren* $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu <_i \widehat{\mathfrak{C}}_\nu$.

Korollar 2 zu Satz 11: *Jede direkte Zerlegung einer Gruppe ist ökonomisch.*

Beweis: Ist das Produkt ein direktes

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_r ,$$

so sind die $\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu$ gleichzeitig Blockkomponenten. Wenn $\mathfrak{S}_\nu$ der Sockel von $\mathfrak{B}_\nu$, ist $\mathfrak{S}_\nu < \mathfrak{C}_\nu$. Also ist die Zerlegung nach dem Korollar 1 ökonomisch.

(Die Zeichen $\widehat{\ }$ sind hier überflüssig, da die Faktoren $\mathfrak{B}_\nu$ Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind und nicht neu geschaffen zu werden brauchen.)

Korollar 3 zu Satz 11: Ist die Blockkomponente $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ eines einfüßigen Faktors $\neq \mathfrak{E}$, so enthält sie den einzigen Fuß $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu = \widehat{\mathfrak{S}}_\nu$. Die Bedingung des Korollars 1 ist also erfüllt und der Faktor ist unkürzbar. Oder die Blockkomponente ist gleich $\mathfrak{E}$. Dann ist der Faktor nach DUDP Satz 7 überzählig. Ein einfüßiger Faktor kann also nicht kürzbar

sein, ohne überzählig zu sein. Die in diesem Paragraphen gegebene Definition der ökonomischen Zerlegung enthält also für einfüßige Faktoren keine neue Forderung.

Die früher definierten ökonomischen Zerlegungen in unzerlegbare Faktoren, die nur frei von überzähligen Faktoren sein mußten, sind also auch im neuen Sinne ökonomisch.

Satz 12: *Es sei*

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$$

eine ökonomische Darstellung von $\mathfrak{G}$, *die* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *seien die subdirekten Faktoren; für* $\nu = 1, 2, \ldots, n$, *sei* $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *die Blockkomponente,* $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *der Sockel von* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$; $\widehat{\mathfrak{S}}$ *sei der Sockel von* $\widehat{\mathfrak{G}}$.

Behauptung: Es ist

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \widehat{\mathfrak{S}}_1 \times \widehat{\mathfrak{S}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_n .$$

Beweis: Da nach Korollar 1 zu Satz 11 $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu < \widehat{\mathfrak{C}}_\nu$, so ist $(\widehat{\mathfrak{S}}_\nu, \widehat{\mathfrak{C}}_\nu) = \widehat{\mathfrak{S}}_\nu$; also ist nach DUDP Korollar 3 zu Hilfssatz 1 und 2

$$\widehat{\mathfrak{S}}_1 \times \widehat{\mathfrak{S}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_n < \widehat{\mathfrak{S}} .$$

Andrerseits ist nach DUDP Korollar 2 zu Hilfssatz 3 und 4

$$\widehat{\mathfrak{S}} < \widehat{\mathfrak{S}}_1 \times \widehat{\mathfrak{S}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_n ,$$

mithin

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \widehat{\mathfrak{S}}_1 \times \widehat{\mathfrak{S}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_n .$$

Korollar 1 zu Satz 12: *Es sei*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n ,$$

$\mathfrak{S}$ *der Sockel von* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}_\nu$ *der Sockel von* $\mathfrak{A}_\nu$. *Dann ist*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n .$$

Das direkte Produkt der subdirekten Faktoren

$$\widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$$

einer Darstellung von $\mathfrak{G}$ war in DUDP der „Schrein" von $\widehat{\mathfrak{G}}$ genannt worden. Aus Korollar 1 zu Satz 12 folgt:

Korollar 2 zu Satz 12: *Ein subdirektes Produkt ist dann und nur dann ökonomisch, wenn sein Sockel gleich dem Sockel des Schreines,*

Oder in Verbindung mit Korollar 1 zu Satz 11:

Ein subdirektes Produkt ist dann und nur dann ökonomisch, wenn der Sockel des Schreines im Block des subdirekten Produktes enthalten ist.

Korollar 3 zu Satz 12: Hat man aus irgendwelchen $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ auf Grund des Korollars 2 ein ökonomisches subdirektes Produkt gebildet, so ist die einer erzeugenden invarianten Untergruppe entsprechende Gruppe nach DUDP Korollar 2 zu Satz 3.

$$\widehat{\mathfrak{D}}_\nu = (\widehat{\mathfrak{G}} \ , \ \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu-1} \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n)$$

d. h. die invariante Untergruppe derjenigen Elemente von $\widehat{\mathfrak{G}}$, deren $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$-Komponente gleich $\widehat{E}$ ist, auf Grund des Satzes 10 von selbst Stativ in $\widehat{\mathfrak{G}}$.

Satz 13: *Ein direkter Faktor ist ein Stativ.*

Beweis: Es folgt dies unmittelbar aus Korollar 2 zu Satz 11 in Verbindung mit Satz 10. Zunächst folgt es für die erzeugenden invarianten Untergruppen. Das sind aber in diesem Falle die Komplementärfaktoren der direkten Faktoren, also selbst beliebige direkte Faktoren.

Der Beweis kann auch unmittelbar geführt werden.

Es sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \ ;$$

es sei ferner

$$\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G} \ ; \qquad \mathfrak{A}_1 < \mathfrak{X} < \mathfrak{G} \ ; \qquad \mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{X} \ .$$

Dann ist nach DUDP Korollar 3 zu Satz 1

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{X}, \mathfrak{A}_2) \ .$$

Es ist $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_2 <_i \mathfrak{G}$, also $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}_2) <_i \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}_2) \neq \mathfrak{E}$, weil $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{E}$ $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}_1$ ergeben würde entgegen der Voraussetzung. Mithin enthält $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}_2)$ einen Fuß $\mathfrak{F}_2$ von $\mathfrak{G}$. Es ist

$$(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{A}_1) < (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{E} \ .$$

Wenn also $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{F}_2 < \mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}_2 < \mathfrak{X}$; also

$$\mathfrak{F}_2 < (\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) \ ; \qquad \big(\mathfrak{F}_2 \ , \ (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{S})\big) < (\mathfrak{F}_2, \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{E} \ ,$$

folglich

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) \neq (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{S}) \ .$$

Jede umfassendere invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ besitzt also einen umfassenderen Sockeldurchschnitt. Also ist $\mathfrak{A}_1$ ein Stativ.

§ 4. Über Weiterzerlegung und Zusammenfassung von Faktoren in allgemeinen ökonomischen Zerlegungen.

In DUDP zu Beginn des § 3 war erläutert worden, daß man in einem subdirekten Produkt einen Faktor weiter zerlegen oder mehrere Faktoren zu einem zusammenfassen kann.

Satz 14: *Zerlegt man in einer ökonomischen subdirekten Zerlegung einer Gruppe einen Faktor weiter ökonomisch, so entsteht wieder eine ökonomische Zerlegung.*

Es sei wie in DUDP zu Beginn des § 3

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$$

eine subdirekte ökonomische Zerlegung von $\mathfrak{G}$, ferner

$$\widehat{\mathfrak{B}}_n \asymp\!\asymp \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_n < \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_1 \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_2 \times \cdots \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_m$$

eine subdirekte ökonomische Zerlegung von $\widehat{\mathfrak{B}}_n$. Es war

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} \asymp\!\asymp \widehat{\widehat{\mathfrak{G}}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{n-1} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_1 \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_2 \times \cdots \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_m$$

Behauptung: Die Zerlegung $\mathfrak{G} \sim \widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ ist ebenfalls ökonomisch.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß kein Faktor von $\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ sich kürzen läßt. Ein $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ für $\nu \leqq n-1$ kann sich nicht kürzen lassen; denn sonst brauchte man nur die Komponenten von $\widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_1$ bis $\widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_m$ durch das entsprechende Element von $\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_\nu$ zu ersetzen, und erhielte, daß sich auch die Darstellung $\widehat{\mathfrak{G}}$ kürzen läßt, was nicht der Fall ist. Kürzt man ein $\widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_\mu$, so wird dadurch die Darstellung von $\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_n$, da sie ökonomisch war, unbestimmt. Geht man zu der isomorphen Darstellung von $\widehat{\mathfrak{B}}_n$ über, so erhält man also eine Kürzung von $\widehat{\mathfrak{B}}_n$, die unzulässig ist, da auch die Darstellung $\widehat{\mathfrak{G}}$ ökonomisch ist. Es darf also in $\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ überhaupt kein Faktor gekürzt werden; die Darstellung ist ökonomisch, was zu beweisen war.

Oder man benutzt Korollar 2 zu Satz 12. Es ist nach Satz 12

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \widehat{\mathfrak{S}}_1 \times \widehat{\mathfrak{S}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_n \ .$$

Geht man zur Zerlegung $\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ über, so wird

$$\mathfrak{S}_n = \widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}_1 \times \widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}_2 \times \cdots \times \widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}_m ,$$

worin $\widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}_\mu$ der Sockel von $\widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_\mu$ sei. Also ist

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{S}}} = \widehat{\mathfrak{S}}_1 \times \widehat{\mathfrak{S}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_{n-1} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}_1 \times \widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}_2 \times \cdots \times \widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}_m .$$

Mithin ist nach Korollar 2 zu Satz 12 auch die Darstellung $\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ ökonomisch.

Satz 15: *Es sei*

$$\mathfrak{G} \approx \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_{m-1} \times \widehat{\mathfrak{B}}_m \times \widehat{\mathfrak{B}}_{m+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$$

eine ökonomische subdirekte Darstellung von $\mathfrak{G}$. *Man fasse die Komponente* $\widehat{\mathfrak{T}}_m$ *von* $\widehat{\mathfrak{G}}$ *nach* $\widehat{\mathfrak{B}}_m \times \widehat{\mathfrak{B}}_{m+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$ *zu einem Faktor* $\widehat{\widehat{\mathfrak{T}}}_m$ *zusammen.*

Behauptung (1): *Es ist*

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{T}}}_m \approx\approx \widehat{\mathfrak{T}}_m < \widehat{\mathfrak{B}}_m \times \widehat{\mathfrak{B}}_{m+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$$

eine ökonomische subdirekte Darstellung von $\widehat{\widehat{\mathfrak{T}}}_m$.

Behauptung (2): *Es ist*

$$\mathfrak{G} \approx\approx \widehat{\widehat{\mathfrak{G}}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_{m-1} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{T}}}_m$$

eine ökonomische subdirekte Darstellung von $\mathfrak{G}$.

Beweis: Eine Blockkomponente von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ für $\nu \geqq m$ kommt in $\widehat{\mathfrak{G}}$ als Element für sich vor, also kommt sie gewiß in $\widehat{\mathfrak{T}}_m$ für sich vor. Die Blockkomponente $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ in bezug auf $\widehat{\mathfrak{G}}$ ist also in der Blockkomponente $\widehat{\mathfrak{C}}'_\nu$ von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ in bezug auf $\widehat{\mathfrak{T}}_m$ enthalten. Es sei $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu$ der Sockel von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. Wenn also $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu < \widehat{\mathfrak{C}}_\nu$, so ist $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu < \widehat{\mathfrak{C}}_\nu < \widehat{\mathfrak{C}}'_\nu$, also ist

$$\widehat{\mathfrak{S}}_m \times \widehat{\mathfrak{S}}_{m+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_n < \widehat{\mathfrak{T}}_m .$$

Es sei $\widehat{\mathfrak{S}}_\mathfrak{T}$ der Sockel von $\widehat{\mathfrak{T}}_m$. Man kann also analog wie im Beweise des Satzes 12 schließen

$$\widehat{\mathfrak{S}}_\mathfrak{T} = \widehat{\mathfrak{S}}_m \times \widehat{\mathfrak{S}}_{m+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_n .$$

Also ist nach Korollar 2 zu Satz 12 $\widehat{\widehat{\mathfrak{T}}}_m \approx\approx \widehat{\mathfrak{T}}_m$ ökonomisch dargestellt. Damit ist die Behauptung (1) bewiesen.

Man fasse nun in

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \widehat{\mathfrak{S}}_1 \times \widehat{\mathfrak{S}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_{m-1} \times \widehat{\mathfrak{S}}_m \times \widehat{\mathfrak{S}}_{m+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_n$$

die letzten Faktoren zusammen.

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \widehat{\mathfrak{S}}_1 \times \widehat{\mathfrak{S}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_{m+1} \times \widehat{\mathfrak{S}}_\mathfrak{T} .$$

Geht man zur Darstellung $\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ über, so ist

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{S}}} = \widehat{\mathfrak{S}}_1 \times \widehat{\mathfrak{S}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{S}}_{m-1} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}_\mathfrak{T} ,$$

also ist nach Korollar 2 zu Satz 12 die Darstellung $\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ ökonomisch; damit ist auch die Behauptung (2) bewiesen.

Korollar zu Satz 14 und 15: *Jede ökonomische Zerlegung einer Gruppe in subdirekte Faktoren kann weiter zerlegt werden in unzerlegbare Faktoren bzw. als aus einer ökonomischen Zerlegung in unzerlegbare Faktoren durch Zusammenfassung entstanden aufgefaßt werden. Jede Zusammenfassung einer ökonomischen Zerlegung in unzerlegbare Faktoren ist eine ökonomische Zerlegung.*

Satz 16: *Jedes Stativ einer Gruppe kommt als erzeugende invariante Untergruppe in einer ökonomischen Zerlegung vor.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{B}_1$ ein Stativ in $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$; $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_1$; $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$. Es sei sei $\mathfrak{B}_2$ ein Stativ über $\mathfrak{S}_2$. Dann ist nach Hilfssatz 3

$$(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = \mathfrak{E}; \quad \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 .$$

Man wende DUDP Satz 4 an. Es sei

$$\widehat{\mathfrak{B}}_1 \overset{1}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}_1} ; \qquad \widehat{\mathfrak{B}}_2 \overset{2}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}_2} ;$$

dann wird

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_1} \underset{\sim}{\times} \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_2}{\widehat{\mathfrak{C}}_2} ,$$

derart daß

$$\mathfrak{B}_1 \asymp \widehat{\mathfrak{C}}_2 ; \qquad \mathfrak{B}_2 \asymp \widehat{\mathfrak{C}}_1 .$$

$\widehat{\mathfrak{C}}_1$ und $\widehat{\mathfrak{C}}_2$ waren die Blockkomponenten. Da $\mathfrak{B}_1$ Stativ ist, ist $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}_1}$ bodenständig nach Satz 3. Es ist also

$$\frac{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{S}}{\mathfrak{B}_1} = \frac{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{B}_1}$$

der Sockel von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}_1}$. Bezeichnet $\widehat{\mathfrak{S}}_1$ den Sockel von $\widehat{\mathfrak{B}}_1$, so ist also wegen $\widehat{\mathfrak{B}}_1 \overset{1}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}_1}$ auch

$$\widehat{\mathfrak{S}}_1 \overset{1}{\sim} \frac{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{B}_1} .$$

Es war aber

$$\widehat{\mathfrak{C}}_1 \overset{1}{\sim} \frac{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1} ,$$

also $\widehat{\mathfrak{S}}_1 < \widehat{\mathfrak{C}}_1$, ebenso $\widehat{\mathfrak{S}}_2 < \widehat{\mathfrak{C}}_2$. Die Bedingung des Korollars 2 zu Satz 12 ist also erfüllt, die Darstellung von $\mathfrak{G}$ als subdirektes (meromorphes) Produkt zweier Faktoren ist mithin ökonomisch. Folglich kommt jedes Stativ in $\mathfrak{G}$ als erzeugende invariante Untergruppe in einer ökonomischen Zerlegung in subdirekte Faktoren vor. (Sogar schon von zwei Faktoren, was aber nicht merkwürdig ist, da wir uns ja immer die übrigen Faktoren nach Satz 15 zu einem einzigen zusammengefaßt denken können.)

Da die Zusammenfassung eines Teiles der Faktoren einer subdirekten Zerlegung nach DUDP Satz 3 für die betreffenden erzeugenden invarianten Untergruppen den Ersatz durch ihren Durchschnitt bedeutet, so folgt aus Satz 14 in Verbindung mit Satz 6:

Satz 17: *Jedes Stativ $\mathfrak{V}$ ist als Durchschnitt von Maximalstativen darstellbar; und zwar braucht man, wenn r der Rang des Sockels, $r - \nu$ der Rang des Sockeldurchschnitts von $\mathfrak{V}$ ist, mindestens ν Maximalstative, und wenn sie zu einem unabhängigen System gehören, genau ν Maximalstative.*

Ferner folgt aus Satz 15:

Satz 18: *In jeder ökonomischen subdirekten Zerlegung einer Gruppe ist der Durchschnitt eines Teiles der erzeugenden Stative wieder ein Stativ.*

Korollar zu Satz 18: *Wenn die Zahl der Faktoren gleich n ist, gibt es 2^n solcher Durchschnitte einschließlich der ganzen Gruppe $\mathfrak{G}$ und des Durchschnittes $\mathfrak{E}$ aller erzeugenden Stative. Die von den n erzeugenden, von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}$ verschiedenen $2^n - n - 2$ Durchschnitte mögen „Unterstative", von diesen die n Durchschnitte zu je $n - 1$ die „untersten Stative" heißen. Diese sind nach DUDP Korollar 1 zu Satz 3 isomorph zugeordnet den Blockkomponenten der subdirekten Darstellung.*

$$\mathfrak{C}_\nu = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{\nu-1}, \mathfrak{B}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{B}_n) \; ; \qquad \mathfrak{C}_\nu \asymp \widehat{\mathfrak{C}}_\nu = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_\nu) .$$

Satz 19: *Es sei* $\mathfrak{D}_\nu <_i \mathfrak{G}$ *für* $\nu = 1, 2, \ldots, n$. *Das Produkt der invarianten Untergruppen sei ein direktes.* $\mathfrak{S}$ *sei der Sockel von* $\mathfrak{G}$. *Man setze zur Abkürzung:*

$$\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \cdots \times \mathfrak{D}_n = \mathfrak{P} \; ;$$

$$(\mathfrak{D}_\nu, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_\nu \; ;$$

$$\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n = \mathfrak{Q} \; .$$

Behauptung: $(\mathfrak{P}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{Q}$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{F}$ ein Fuß von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{F} < \mathfrak{P}$. Man setze

$$\mathfrak{D}_\nu \times \mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{P},$$

wo $\mathfrak{M}_\nu$ das Produkt der von $\mathfrak{D}_\nu$ verschiedenen Faktoren bezeichnet. Es ist $\mathfrak{F}\mathfrak{M}_\nu$ die Untergruppe aller Elemente von $\mathfrak{P}$, die dieselben $\mathfrak{D}_\nu$-Komponenten wie $\mathfrak{F}$ haben. Es ist also

$$\mathfrak{F}_\nu = (\mathfrak{F}\mathfrak{M}_\nu \; , \; \mathfrak{D}_\nu)$$

die $\mathfrak{D}_\nu$-Komponente von $\mathfrak{F}$. Wegen

$$\mathfrak{F} <_i \mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{M}_\nu <_i \mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{D}_\nu <_i \mathfrak{G}$$

ist auch $\mathfrak{F}_\nu <_i \mathfrak{G}$. Es soll gezeigt werden, daß $\mathfrak{F}_\nu$ ein Fuß von $\mathfrak{G}$ ist. Angenommen, das wäre nicht der Fall, so gäbe es ein $\mathfrak{X}_\nu$, so daß

$$\mathfrak{X}_\nu <_i \mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{X}_\nu < \mathfrak{F}_\nu, \qquad \mathfrak{E} \neq \mathfrak{X}_\nu \neq \mathfrak{F}_\nu .$$

Man setze

$$\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_\nu \times \mathfrak{M}_\nu \; , \; \mathfrak{F})$$

Es ist auch $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}$; $\mathfrak{X} < \mathfrak{F}$. $\mathfrak{X}$ besteht aus allen Elementen von $\mathfrak{F}$, deren $\mathfrak{D}_\nu$-Komponenten $\mathfrak{X}_\nu$ angehören. Da jedes Element von $\mathfrak{F}_\nu$ in $\mathfrak{F}$ als Komponente wirklich vorkommt, so ist wegen $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{X}_\nu \neq \mathfrak{F}_\nu$ auch $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{X} \neq \mathfrak{F}$. Wenn also $\mathfrak{F}_\nu$ nicht Fuß von $\mathfrak{G}$ wäre, so wäre auch $\mathfrak{F}$ nicht Fuß von $\mathfrak{G}$, was der Voraussetzung widerspräche. Es muß also $\mathfrak{F}_\nu$ Fuß von $\mathfrak{G}$ sein. Also $\mathfrak{F}_\nu < \mathfrak{S}_\nu$. Da dies für alle Komponenten von $\mathfrak{F}$ gilt, so ergibt sich $\mathfrak{F} < \mathfrak{Q}$. Nach MIU Satz 1a ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{S})$ gleich dem Produkte sämtlicher darin enthaltenen, d. h. sämtlicher in $\mathfrak{P}$ enthaltenen Füße $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$. Also ist

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{S}) < \mathfrak{Q}.$$

Andrerseits ist

$$\mathfrak{S}_\nu = (\mathfrak{D}_\nu, \mathfrak{S}) < (\mathfrak{P}, \mathfrak{S}).$$

Also ist das Produkt der $\mathfrak{S}_\nu$

$$\mathfrak{Q} < (\mathfrak{P}, \mathfrak{S}).$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt

$$\mathfrak{Q} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{S}),$$

was zu beweisen war.

Satz 20: *Es sei* $\mathfrak{D}_\nu <_i \mathfrak{G}$ *für* $\nu = 1, 2, \ldots, n$. $\mathfrak{S}$ *sei der Sockel von* $\mathfrak{G}$. *Es sei das Produkt*

(1) $$(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{S}) \times (\mathfrak{D}_2, \mathfrak{S}) \times \cdots \times (\mathfrak{D}_n, \mathfrak{S}) = \mathfrak{Q}_n$$

ein direktes.

Behauptung: *Das Produkt*

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \cdots \times \mathfrak{D}_n$$

ist ein direktes.

Beweis: Für $n = 2$ folgt aus Hilfssatz 3, da

$$\mathfrak{E} = \big((\mathfrak{D}_1, \mathfrak{S}) \ , \ (\mathfrak{D}_2, \mathfrak{S})\big) = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{S})$$

ist,

$$(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{E}, \qquad \text{also} \qquad \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 .$$

Der Satz ist richtig für $n = 2$. Der Beweis werde durch Induktion geführt. Für $n - 1$ sei der Satz bereits bewiesen. Bezeichnet man das Teilprodukt der $n - 1$ ersten Faktoren in (1) mit $\mathfrak{Q}_{n-1}$, so kann man schreiben:

$$(2) \qquad \mathfrak{Q}_{n-1} \times (\mathfrak{D}_n, \mathfrak{S}) = \mathfrak{Q}_n .$$

Da auch das Teilprodukt $\mathfrak{Q}_{n-1}$ ein direktes ist, so ist auf Grund des für $n - 1$ bereits bewiesenen Satzes

$$(3) \qquad \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \cdots \times \mathfrak{D}_{n-1} = \mathfrak{P}_{n-1}$$

ein direktes Produkt. Nach Satz 19 ist also

$$(4) \qquad (\mathfrak{P}_{n-1}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{Q}_{n-1} .$$

Das in (2) eingesetzt, ergibt

$$(\mathfrak{P}_{n-1}, \mathfrak{S}) \times (\mathfrak{D}_n, \mathfrak{S}) = \mathfrak{Q}_n .$$

Hieraus folgt nach Hilfssatz 3

$$(\mathfrak{P}_{n-1}, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{E}; \quad \text{also ist} \quad \mathfrak{P}_{n-1} \times \mathfrak{D}_n = \mathfrak{P}_n$$

ein direktes Produkt, was zu beweisen war. Also gilt der Satz allgemein.

Satz 21: *Es sei* $\mathfrak{V}_1$ *ein Stativ in* $\mathfrak{G}$, $\dfrac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_1}$ *ein Stativ in der Faktorgruppe* $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_1}$.

Behauptung: *Es ist* $\mathfrak{V}_2$ *ein Stativ in* $\mathfrak{G}$.

Beweis: Nach Satz 16 kommt der Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}_1 \curlyeqprec_1 \dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_1}$ in einer ökonomischen Zerlegung von $\mathfrak{G}$ vor. Nach Satz 14 kann man $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ ökonomisch weiterzerlegen und erhält wieder Faktoren einer ökonomischen Zerlegung von $\mathfrak{G}$. Es sei $\widehat{\mathfrak{V}}_2 <_i \widehat{\mathfrak{B}}_1$ ein Stativ in $\widehat{\mathfrak{B}}_1$; dann ist $\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_2 \curlyeqprec_2 \dfrac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{B}}_2}$ ein Faktor einer ökonomischen Zerlegung von $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ nach Satz 16 und von $\mathfrak{G}$ nach Satz 14; also ist, wenn $\widehat{\mathfrak{B}}_2 \curlyeqprec_1 \dfrac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_1}$ ist, $\mathfrak{V}_2$ ein Stativ in $\mathfrak{G}$ nach Satz 10.

Oder man benutze Satz 3. Es ist, da $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_1}$ bodenständig in $\mathfrak{G}$ ist, der Sockel von $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_1}$ gleich

$$\frac{\mathfrak{V}_1 \mathfrak{S}}{\mathfrak{V}_1} = \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{V}_1} .$$

Ebenso ist, da

$$\frac{\left(\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_1}\right)}{\left(\dfrac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_1}\right)}$$

bodenständig ist in $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_1}$, der Sockel von

$$\frac{\left(\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_1}\right)}{\left(\dfrac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_1}\right)} \quad \text{gleich} \quad \frac{\dfrac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_1} \cdot \dfrac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{V}_1}}{\dfrac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_1}} .$$

Man kann die Komplexe von Komplexen als Komplexe von Elementen auffassen und erhält, daß der Sockel von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_2}$ gleich

$$\frac{\mathfrak{V}_2 \cdot \mathfrak{S}_1}{\mathfrak{V}_2} = \frac{\mathfrak{V}_2 \cdot \mathfrak{V}_1 \mathfrak{S}}{\mathfrak{V}_2} = \frac{\mathfrak{V}_2 \mathfrak{S}}{\mathfrak{V}_2}.$$

Das ist aber die Bedingung für die Bodenständigkeit von $\mathfrak{V}_2$. Also ist nach Satz 3 $\mathfrak{V}_2$ ein Stativ in $\mathfrak{G}$.

Satz 22: *Wenn* $\mathfrak{D}_1 <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}_2 <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{V}_3 = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2)$ *ein Stativ,* $\mathfrak{S}$ *der Sockel von G, dann ist*

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1) \cdot (\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_2).$$

Beweis: Es ist

$$\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{V}_3}, \frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{V}_3}\right) = \frac{(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2)}{\mathfrak{V}_3} = \frac{\mathfrak{V}_3}{\mathfrak{V}_3}.$$

Die beiden Faktorgruppen sind also teilerfremd; auf sie ist also Satz 19 anwendbar. Nach Satz 3 ist $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_3}$ bodenständig, also der Sockel von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_3}$ gleich $\frac{\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}}{\mathfrak{V}_3}$. Die Anwendung von Satz 19 lautet also

$$\left(\frac{\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}}{\mathfrak{V}_3}, \frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{V}_3} \times \frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{V}_3}\right) = \left(\frac{\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}}{\mathfrak{V}_3}, \frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{V}_3}\right) \times \left(\frac{\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}}{\mathfrak{V}_3}, \frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{V}_3}\right)$$

oder, wenn man anstatt der Komplexe die Elemente betrachtet,

$$(1) \qquad (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1) \cdot (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_2).$$

Es sei

$$(\mathfrak{V}_3, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_3, \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_3, \qquad \text{also} \qquad \mathfrak{V}_3 \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_3.$$

Es ist nach DUDP Korollar 3 zu Satz 1, da

$$\mathfrak{V}_3 < (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1) < \mathfrak{V}_3 \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_3$$

ist,

$$(2) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1) = \mathfrak{V}_3 \times \big((\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1), \overline{\mathfrak{S}}_3\big) \\ = \mathfrak{V}_3 \times (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1, \overline{\mathfrak{S}}_3) = \mathfrak{V}_3 \times (\overline{\mathfrak{S}}_3, \mathfrak{D}_1) = \mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_1, \end{cases}$$

worin zur Abkürzung $(\overline{\mathfrak{S}}_3, \mathfrak{D}_1) = \overline{\mathfrak{S}}_1$ gesetzt ist. Ebenso setze man $(\overline{\mathfrak{S}}_3, \mathfrak{D}_2) = \overline{\mathfrak{S}}_2$, $(\overline{\mathfrak{S}}_3, \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_3) = \overline{\mathfrak{S}}_4$; dann erhält man entsprechend (2)

$$(3) \qquad (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_2; \qquad (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_4.$$

Setzt man (2) und (3) in (1) ein, so erhält man

$$\mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_4 = (\mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_1) \cdot (\mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_2) = \mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_1 \overline{\mathfrak{S}}_2,$$

da beide Seiten in $\mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_3$ enthalten sind. Durch Vergleich der $\overline{\mathfrak{S}}_3$-Komponenten ergibt sich

$$(4) \qquad \overline{\mathfrak{S}}_4 = \overline{\mathfrak{S}}_1 \overline{\mathfrak{S}}_2.$$

Nun ist aber

$$\big((\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1), (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_2)\big) = (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{S}, \mathfrak{V}_3) = \mathfrak{V}_3;$$

also unter Benutzung von (2) und (3)

$$(\mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_1, \mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_2) = \mathfrak{V}_3$$

oder

$$\mathfrak{V}_3 \times (\overline{\mathfrak{S}}_1, \overline{\mathfrak{S}}_2) = \mathfrak{V}_3$$

also $(\overline{\mathfrak{S}}_1, \overline{\mathfrak{S}}_2) = \mathfrak{E}$; (4) lautet also

$$\overline{\mathfrak{S}}_4 = \overline{\mathfrak{S}}_1 \times \overline{\mathfrak{S}}_2 . \tag{5}$$

Es ist

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1) < (\mathfrak{V}_3\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1) = \mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_1 ; \qquad (\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1) < \mathfrak{S},$$

also

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1) < (\mathfrak{V}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_1, \mathfrak{S}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_3) = \mathfrak{S}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_1.$$

Andrerseits ist

$$\overline{\mathfrak{S}}_1 < \mathfrak{S} ; \quad \overline{\mathfrak{S}}_1 < \mathfrak{D}_1 ; \quad \mathfrak{S}_3 < \mathfrak{S} ; \quad \mathfrak{S}_3 < \mathfrak{V}_3 < \mathfrak{D}_1 ;$$

also

$$\mathfrak{S}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_1 < (\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1) ;$$

mithin

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1) = \mathfrak{S}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_1 .$$

Ebenso erhält man

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{S}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_2 ; \qquad (\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2) = \overline{\mathfrak{S}}_3 \times \mathfrak{S}_4 .$$

Aus (5) folgt

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2) = \mathfrak{S}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_4 = \mathfrak{S}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_1 \times \overline{\mathfrak{S}}_2 = (\mathfrak{S}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_1) \cdot (\mathfrak{S}_3 \times \overline{\mathfrak{S}}_2) = (\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_1) \cdot (\mathfrak{S}, \mathfrak{D}_2).$$

Das ist aber die Behauptung des Satzes.

Es sollen nunmehr folgende Fragen untersucht werden. Wie müssen zwei, bzw. n Stative beschaffen sein, damit sie als erzeugende Stative, bzw. als Unterstative in einer ökonomischen Zerlegung zusammen auftreten können?

Damit n Stative in $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$$

für die

$$(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n) = \mathfrak{E}$$

die sämtlichen erzeugenden invarianten Untergruppen einer ökonomischen Zerlegung von $\mathfrak{G}$ seien, ist nach Korollar 1 zu Satz 11 notwendig und hinreichend, daß für jeden Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \underset{\nu}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_\nu}$ die Bedingung $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu < \widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ erfüllt sei, worin $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu$ den Sockel, $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ die Blockkomponente von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ bedeutet. Es ist der Sockel von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_\nu}$ nach Satz 7 gleich $\frac{\mathfrak{S}\mathfrak{V}_\nu}{\mathfrak{V}_\nu}$. Es ist nach DUDP Korollar 1 zu Satz 3 die Blockkomponente

$$\widehat{\mathfrak{C}}_\nu \asymp (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{\nu-1}, \mathfrak{V}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{V}_n) = \mathfrak{C}_\nu .$$

Durch den Isomorphismus $\underset{\nu}{\sim}$ ist zugeordnet

$$\widehat{\mathfrak{C}}_\nu \underset{\nu}{\sim} \frac{\mathfrak{C}_\nu\mathfrak{V}_\nu}{\mathfrak{V}_\nu} = \frac{\mathfrak{C}_\nu \times \mathfrak{V}_\nu}{\mathfrak{V}_\nu} .$$

Die Bedingung $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu < \widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ ist also gleichbedeutend mit

$$\frac{\mathfrak{S}\mathfrak{V}_\nu}{\mathfrak{V}_\nu} < \frac{\mathfrak{C}_\nu \times \mathfrak{V}_\nu}{\mathfrak{V}_\nu}$$

oder mit

$$\mathfrak{S}\mathfrak{V}_\nu < \mathfrak{C}_\nu \times \mathfrak{V}_\nu ;$$

dann ist auch

$$\mathfrak{S} < \mathfrak{C}_\nu \times \mathfrak{B}_\nu .$$

Wenn umgekehrt diese letzte Bedingung gilt, ist auch die vorangehende erfüllt. Die Bedingung des Korollars 1 zu Satz 11 liefert also: Die Zerlegung ist dann und nur dann ökonomisch, wenn

$$(1) \qquad \mathfrak{S} < \mathfrak{C}_\nu \times \mathfrak{B}_\nu \qquad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

oder, was dasselbe besagt, wenn

$$(2) \qquad \mathfrak{S} = (\mathfrak{S} \ , \ \mathfrak{C}_\nu \times \mathfrak{B}_\nu) \qquad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

oder, unter Berufung auf Satz 19, wenn

$$(3) \qquad \mathfrak{S} = (\mathfrak{S}, \mathfrak{C}_\nu) \times (\mathfrak{S}, \mathfrak{B}_\nu) \qquad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

Dies ist aber eine Bedingung, die sich nur noch auf die Sockeldurchschnitte der Stative bezieht. Hieraus folgt:

Satz 23: *Eine ökonomische Zerlegung einer Gruppe in subdirekte Faktoren behält ihre Eigenschaft bei, wenn man die erzeugenden Stative durch andere über den gleichen Sockeldurchschnitten ersetzt.*

Man setze zur Abkürzung $(\mathfrak{S}, \mathfrak{C}_\nu) = \mathfrak{S}_\nu$; $(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}_\nu) = \mathfrak{D}_\nu$. Es ist $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{E}$ und

$$(4) \qquad (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{\nu-1}, \mathfrak{D}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{S}_\nu .$$

Die Bedingung (3) lautet also: Hat man Gruppen $\mathfrak{D}_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$,

$$\mathfrak{D}_\nu <_i \mathfrak{G} \ , \qquad \mathfrak{D}_\nu < \mathfrak{S},$$

wo $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$, ist $\mathfrak{S}_\nu$ durch (4) definiert und gilt

$$(5) \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{D}_\nu \times \mathfrak{S}_\nu \qquad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

ist ferner $\mathfrak{B}_\nu$ ein Stativ in $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{D}_\nu$

$$\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \overset{\nu}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}_\nu} \qquad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

so ist

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$$

eine ökonomische Darstellung von $\mathfrak{G}$. Dann folgt aus Satz 12:

$$(6) \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n .$$

Man kann aber auch direkt einsehen, daß aus der Voraussetzung (5) die Beziehung (6) folgt, sogar als spezieller Fall eines allgemeineren Satzes.

Satz 24: *Es sei $\mathfrak{S}$ eine beliebige Gruppe,*

$$\mathfrak{D}_\nu <_i \mathfrak{S} \ ; \qquad (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{E} \ ;$$
$$\mathfrak{S}_\nu = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{\nu-1}, \mathfrak{D}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{D}_n) \ .$$
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{D}_\nu \times \mathfrak{S}_\nu \qquad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Behauptung:

$$(1) \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n .$$

Beweis: Man setze

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{D}_1 \ ; \qquad \mathfrak{R}_\nu = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_\nu) .$$

Mithin ist

$$\mathfrak{R}_{n-1} = \mathfrak{S}_n \ ; \qquad \mathfrak{R}_n = \mathfrak{E} .$$

Es sei die Beziehung

$$(2) \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_\nu \times \mathfrak{R}_\nu$$

für ν bewiesen und soll für $\nu + 1$ bewiesen werden. Es ist

$$\mathfrak{S}_{\nu+1} < \mathfrak{R}_\nu < \mathfrak{S}_{\nu+1} \times \mathfrak{D}_{\nu+1} = \mathfrak{S} .$$

Also ist nach DUDP Korollar 3 zu Satz 1

$$\mathfrak{R}_\nu = \mathfrak{S}_{\nu+1} \times (\mathfrak{R}_\nu , \mathfrak{D}_{\nu+1}) = \mathfrak{S}_{\nu+1} \times \mathfrak{R}_{\nu+1} .$$

Setzt man diese Gleichung in (2) ein, so erhält man

$$(3) \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_\nu \times \mathfrak{S}_{\nu+1} \times \mathfrak{R}_{\nu+1} .$$

Das ist aber die Beziehung für $\nu + 1$. Da sie für $\nu = 1$ richtig ist, nämlich

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{D}_1$$

so gilt sie allgemein. Für $\nu = n - 1$ oder für $\nu = n$ liefert sie aber die Behauptung.

Korollar 1 zu Satz 24: *Unter den Voraussetzungen des Satzes 24 ist*

$$\mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\nu-1} \times \mathfrak{S}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_n \,(= \overline{\mathfrak{D}}_\nu) .$$

Beweis: $\overline{\mathfrak{D}}_\nu$ sei vorläufig zur Abkürzung für die rechte Seite eingeführt. Es ist $\mathfrak{S}_\mu < \mathfrak{D}_\nu$ für $\mu \neq \nu$, nach der Definition von $\mathfrak{S}_\mu$, also $\overline{\mathfrak{D}}_\nu < \mathfrak{D}_\nu$. Ferner ist

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\nu \times \mathfrak{D}_\nu$$

nach Voraussetzung,

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\nu \times \overline{\mathfrak{D}}_\nu$$

nach Satz 24, mithin Ord $\mathfrak{D}_\nu$ = Ord $\overline{\mathfrak{D}}_\nu$, also $\mathfrak{D}_\nu = \overline{\mathfrak{D}}_\nu$, was zu beweisen war.

Satz 24 mit Korollar 1 interessiert uns hier nur in dem speziellen Falle, daß $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}_\nu <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}_\nu < \mathfrak{S}$.

Korollar 2 zu Satz 24: *Man erhält alle ökonomischen Zerlegungen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ in subdirekte Faktoren, wenn man ausgeht von einer beliebigen direkten Zerlegung des Sockels $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ in Faktoren, die invariant in $\mathfrak{G}$ sind:*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n ,$$

indem man

$$\mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\nu-1} \times \mathfrak{S}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_n \qquad \textit{für} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

setzt, die $\mathfrak{B}_\nu$ als Stative über $\mathfrak{D}_\nu$, $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \simeq_\nu \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}_\nu}$, und die subdirekte Zerlegung

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$$

bestimmt.

Die Faktoren sind dann und nur dann unzerlegbar, wenn die $\mathfrak{S}_\nu$ Füße von $\mathfrak{G}$ sind.

Eine andere Fassung der Bedingung dafür, daß n Stative $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$ in $\mathfrak{G}$ die erzeugenden invarianten Untergruppen einer ökonomischen Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in subdirekte Faktoren sind, erhält man dadurch, daß man sich die Zerlegung weiter in unzerlegbare Faktoren zerlegt denkt. Man erhält nach DUDP Satz 3 (dem allgemeinen Falle, $\mathfrak{D}^* \neq \mathfrak{E}$)

$$\mathfrak{B}_1 = (\mathfrak{W}_{1,1}, \mathfrak{W}_{1,2}, \ldots, \mathfrak{W}_{1,\varrho_1}),$$

wo die $\mathfrak{W}_{\nu,\lambda}$ Maximalstative sind. Es sei, wenn $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$ ist, $(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}_\nu) = \mathfrak{D}_\nu$, die $(\mathfrak{S}, \mathfrak{W}_{\nu,\lambda}) = \mathfrak{P}_{\nu,\lambda}$ sind Komplementärfüße. Der Rang von $\mathfrak{D}_\nu$ sei $r - \varrho_\nu$, wo r der Rang von $\mathfrak{S}$ sei. Dann ist

$$\mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{P}_{1,1}, \mathfrak{P}_{1,2}, \ldots, \mathfrak{P}_{1,\varrho_1})$$

ebenso

$$\mathfrak{D}_\nu = (\mathfrak{D}_{\nu,1}, \mathfrak{D}_{\nu,2}, \ldots, \mathfrak{D}_{\nu,\varrho_\nu}) .$$

Da nach Satz 14 durch Zerlegung der einzelnen Faktoren eine ökonomische Zerlegung

von $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare Faktoren entsteht, so ist die Gesamtzahl der $\mathfrak{P}_{\nu,\lambda}$ gleich dem Range des Sockels r oder

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n = r$$

und nach Satz 6 ist der Rang von

$$(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_\nu)$$

gleich

$$r - (\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\nu).$$

Umgekehrt gilt der Satz:

Satz 25: *Ist der Rang von $\mathfrak{Q}_\nu$ gleich $r - \varrho_\nu$, der Rang von $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_\nu)$ gleich*

$$r - (\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\nu) \qquad \textit{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

ist endlich

$$r = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n$$

so ist, wenn $\mathfrak{V}_\nu$, $\widehat{\mathfrak{V}}_\nu$ die obige Bedeutung haben, die Zerlegung ökonomisch.

Beweis: Stellt man jedes $\mathfrak{V}_\nu$ als Durchschnitt von Maximalstativen $\mathfrak{W}_\lambda$ dar, so daß also die $(\mathfrak{S}, \mathfrak{W}_\lambda) = \mathfrak{P}_\lambda$ Komplementärfüße sind, so folgt nach Satz 6 aus der Voraussetzung, daß jedes hinzutretende $\mathfrak{P}_\lambda$ den Rang des Durchschnitts der $\mathfrak{P}_\lambda$ um 1 vermindert und ihre Anzahl gleich r ist. Also ist die durch die $\mathfrak{W}_\lambda$ definierte Zerlegung eine ökonomische in unzerlegbare Faktoren; die durch die definierte Zerlegung ist eine ökonomische nach Satz 15.

Hilfssatz 10: *Es sei $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$;*

$$\mathfrak{Q}_1 <_i \mathfrak{G}\ ; \qquad \mathfrak{Q}_2 <_i \mathfrak{G}\ ; \qquad \mathfrak{Q}_1 < \mathfrak{S}\ ; \qquad \mathfrak{Q}_2 < \mathfrak{S}\ ; \qquad (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = \mathfrak{Q}_3 .$$

Die Ränge von $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3$ seien $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$. Dann ist der Rang von $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2$ gleich $\varkappa_1 + \varkappa_2 - \varkappa_3$.

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_3\ ; \qquad (\mathfrak{Q}_1, \overline{\mathfrak{Q}}_3) = \overline{\mathfrak{Q}}_1\ ; \qquad (\mathfrak{Q}_2, \overline{\mathfrak{Q}}_3) = \overline{\mathfrak{Q}}_2\ ;$$

dann ist

$$\mathfrak{Q}_3 < \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_3 = \mathfrak{S},$$

also nach DUDP Korollar 3 zu Satz 1

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_3 \times (\mathfrak{Q}_1, \overline{\mathfrak{Q}}_3) = \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_1,$$

ebenso

$$\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_2 .$$

Hieraus ergibt sich

$$\mathfrak{Q}_3 = (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_1\ ,\ \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_2) = \mathfrak{Q}_3 \times (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2),$$

also

$$(\overline{\mathfrak{Q}}_1, \overline{\mathfrak{Q}}_2) = \mathfrak{E},$$
$$\overline{\mathfrak{Q}}_1 \overline{\mathfrak{Q}}_2 = \overline{\mathfrak{Q}}_1 \times \overline{\mathfrak{Q}}_2 < \overline{\mathfrak{Q}}_3$$
$$\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_1 \times \overline{\mathfrak{Q}}_2,$$

mithin

$$\text{Rang } \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 = \varkappa_3 + (\varkappa_1 - \varkappa_3) + (\varkappa_2 - \varkappa_3) = \varkappa_1 + \varkappa_2 - \varkappa_3 .$$

Satz 26: *Es seien $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ Stative in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$; $(\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_1) = \mathfrak{Q}_1$;*

$(\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_2) = \mathfrak{Q}_2$. *Wenn* $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2$, *so können* $\mathfrak{V}_1$ *und* $\mathfrak{V}_2$ *zusammen als erzeugende Stative einer ökonomischen Zerlegung von* $\mathfrak{G}$ *in subdirekte Faktoren vorkommen.*

Beweis: Man setze $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = \mathfrak{Q}_3$; es sei für $\nu = 1, 2, 3$ der Rang $\varkappa_\nu = r - \varrho_\nu$. Dann ist nach Hilfssatz 10

$$\text{Rang } \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 = \varkappa_1 + \varkappa_2 - \varkappa_3 = \text{Rang } \mathfrak{S} = r$$

oder

$$(r - \varrho_1) + (r - \varrho_2) - (r - \varrho_3) = r$$

oder

$$\varrho_3 = \varrho_1 + \varrho_2 .$$

Das ist aber die Bedingung des Satzes 25 für zwei Faktoren. Also können $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ zusammen als erzeugende Stative vorkommen.

Korollar zu Satz 26: *Sind die Voraussetzungen des Satzes* 26 *erfüllt, so ist* $\mathfrak{V}_3 = (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$ *von selbst wieder ein Stativ.*

Satz 27: *Es seien* $\mathfrak{S}$ *der Sockel von* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{V}_1$ *und* $\mathfrak{V}_2$ *Stative in* $\mathfrak{G}$,

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_1) = \mathfrak{Q}_1 , \quad (\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_2) = \mathfrak{Q}_2 , \quad (\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2) = \mathfrak{Q}_4 .$$

Wenn $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_4$, *so können* $\mathfrak{V}_1$ *und* $\mathfrak{V}_2$ *als Unterstative in derselben ökonomischen Zerlegung von* $\mathfrak{G}$ *in subdirekte Faktoren vorkommen.*

Beweis: $\mathfrak{V}_4$ sei ein Stativ über $\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2$; also

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_4) = (\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2) = \mathfrak{Q}_4 .$$

Es seien $\mathfrak{Q}_3, \overline{\mathfrak{Q}}_3, \overline{\mathfrak{Q}}_1, \overline{\mathfrak{Q}}_2$ definiert wie im Beweise des Hilfssatzes 10. Es sei $\overline{\mathfrak{Q}}_4 = (\mathfrak{Q}_4, \overline{\mathfrak{Q}}_3)$; also $\mathfrak{Q}_4 = \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_4$; $\overline{\mathfrak{Q}}_3 = \overline{\mathfrak{Q}}_4 \times \overline{\overline{\mathfrak{Q}}}_4$. Die Voraussetzung $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_4$ lautet jetzt

$$\mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_1 \times \overline{\mathfrak{Q}}_2 = \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_4$$

also, da die $\overline{\mathfrak{Q}}_\lambda < \overline{\mathfrak{Q}}_3$,

$$\overline{\mathfrak{Q}}_1 \times \overline{\mathfrak{Q}}_2 = \overline{\mathfrak{Q}}_4 ; \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_1 \times \overline{\mathfrak{Q}}_2 \times \overline{\overline{\mathfrak{Q}}}_4 .$$

Man denke sich nun diese vier Faktoren weiter zerlegt in direkte Produkte von Füßen $\mathfrak{F}_\nu$. Man fasse sie zu je $r - 1$ zu Komplementärfüßen $\mathfrak{P}_\nu$ zusammen. Man bestimme jetzt Maximalstative $\mathfrak{W}_\nu$ über den Komplementärfüßen $\mathfrak{P}_\nu$. Es sei immer $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}_\nu \times \mathfrak{P}_\nu$. Wenn $\mathfrak{F}_\nu < \overline{\mathfrak{Q}}_4$, so ist $\mathfrak{Q}_4 = \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_1 \times \overline{\mathfrak{Q}}_3 < \mathfrak{P}_\nu$; dann verlange man $\mathfrak{V}_4 < \mathfrak{W}_\nu$. Wenn $\mathfrak{F}_\nu < \overline{\mathfrak{Q}}_1$, so ist $\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_2 < \mathfrak{P}_\nu$; dann verlange man $\mathfrak{V}_2 < \mathfrak{W}_\nu$. Wenn $\mathfrak{F}_\nu < \overline{\mathfrak{Q}}_2$, so ist $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_3 \times \overline{\mathfrak{Q}}_1 < \mathfrak{P}_\nu$; dann verlange man $\mathfrak{V}_1 < \mathfrak{W}_\nu$. Die Maximalstative sind die erzeugenden einer ökonomischen Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare Faktoren nach Satz 7. Der Durchschnitt aller $\mathfrak{W}_\nu$, welche $\mathfrak{Q}_4$ enthalten, heiße $\overline{\mathfrak{V}}_4$. Es waren die $\mathfrak{W}_\nu$ so gewählt, daß wenn $\mathfrak{Q}_4 < \mathfrak{W}_\nu$, auch $\mathfrak{V}_4 < \mathfrak{W}_\nu$, mithin $\mathfrak{V}_4 < \overline{\mathfrak{V}}_4$. Es ist $(\mathfrak{S}, \overline{\mathfrak{V}}_4) = \mathfrak{Q}_4$; also ist $\overline{\mathfrak{V}}_4 = \mathfrak{V}_4$ nach der Definition des Stativs. $\overline{\mathfrak{V}}_4$ mußte übrigens auch nach Satz 18 ein Stativ sein. Ebenso ist $\mathfrak{V}_1$ der Durchschnitt der $\mathfrak{W}_\nu$, für die $\mathfrak{Q}_1 < \mathfrak{W}_\nu$. Entsprechend für $\mathfrak{V}_2$. Es kommen also $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ als Unterstative in derselben ökonomischen Zerlegung von $\mathfrak{G}$ vor.

Korollar 1 *zu Satz* 27: Unter den Voraussetzungen des Satzes 27, d. h. wenn $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ Stative in $\mathfrak{G}$,

(1) $$(\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2) = (\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_1) \cdot (\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_2) ,$$

ist $\mathfrak{V}_3 = (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$ wieder ein Stativ in nach Satz 18. Umgekehrt ist, wenn $\mathfrak{V}_3$ Stativ, (1) erfüllt nach Satz 22. Wenn also $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ Stative in $\mathfrak{G}$ sind, so ist die Bedingung (1) mit der Bedingung, $\mathfrak{V}_3 = (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$ Stativ in $\mathfrak{G}$, völlig äquivalent; jede der beiden

Bedingungen ist notwendig und hinreichend dafür, daß $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ zusammen als Unterstative in einer ökonomischen Zerlegung vorkommen können.

Korollar 2 *zu Satz* 27: Man kann auch das System sämtlicher Unterstative einer Zerlegung von unten her aufbauen. Man beginne mit einer direkten Zerlegung des Sockels $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n$$

wo $\mathfrak{S}_\nu <_i \mathfrak{G}$, bestimme Stative $\mathfrak{C}_\nu$ über $\mathfrak{S}_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Diese seien die untersten Stative der Zerlegung, die nach dem Korollar zu Satz 18 den Blockkomponenten zugeordnet sind. Ihr Produkt ist ein direktes nach Satz 20.

Es ist nach Satz 19

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \cdots \times \mathfrak{C}_{\nu-1} \times \mathfrak{C}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{C}_n)$$
$$= \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\nu-1} \times \mathfrak{S}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_n = \mathfrak{Q}_\nu \qquad \text{für} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

wo $\mathfrak{Q}_\nu$ zur Abkürzung für die rechte Seite steht. Man kann also bei der Bildung der Stative $\mathfrak{V}_\nu$ über $\mathfrak{Q}_\nu$ nach Korollar 2 zu Satz 24 verlangen, daß

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \cdots \times \mathfrak{C}_{\nu-1} \times \mathfrak{C}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{C}_n < \mathfrak{V}_\nu .$$

Beginnt man speziell mit einer Zerlegung des Sockels in Füße, so erhält man eine subdirekte ökonomische Zerlegung in unzerlegbare Faktoren.

§ 5. Eindeutigkeitssätze bei Stativen.

Von einer isomorphen Eindeutigkeit der ökonomischen Zerlegung in unzerlegbare Faktoren ist keine Rede, wie in DUDP an einem einfachen Beispiel einer kommutativen Gruppe gezeigt worden ist. Es sind deshalb spezielle Fälle von Interesse, in denen sie gilt, von denen wir einige bereits in DUDP § 6 kennengelernt haben. Zwei subdirekte Faktoren zweier Zerlegungen einer Gruppe hießen subidentisch, wenn die erzeugenden invarianten Untergruppen identisch sind. Bei direkten Faktoren mußte die Identität von der Subidentität unterschieden werden; die Subidentität bedeutete Identität der Komplementär-Faktoren. Zwei Zerlegungen hießen identisch, wenn sämtliche Faktoren subidentisch übereinstimmten. Als Beispiel der identisch eindeutig subdirekt zerlegbaren Gruppen hatten wir diejenigen kennengelernt, deren sämtliche Füße von III. Art sind. Es ist ferner, wenn keine identische Eindeutigkeit der Zerlegung vorhanden ist, wünschenswert, durch geeignete Sätze die Vieldeutigkeit der Zerlegung einzuschränken. Über einem festen Sockeldurchschnitt sind im allgemeinen mehrere Stative möglich, wie sogleich gezeigt werden soll. Es interessieren daher besonders die Fälle, wo über einem festen Sockeldurchschnitt nur ein einziges Stativ existiert. Solche Stative mögen „einzige Stative" heißen. Als einzige Stative haben wir in DUDP § 6 die Stative über den Komplementärfüßen der Füße III. Art kennengelernt. Ganz ebenso wie dort werden wir beweisen, daß ein Stativ, das alle Füße I. und II. Art enthält, immer ein einziges Stativ ist.

Bei der ökonomischen Zerlegung in subdirekte unzerlegbare Faktoren kann man so vorgehen, daß man zunächst in direkte Faktoren zerlegt; diese Zerlegung ist nach Korollar 2 zu Satz 11 ökonomisch. Diese Zerlegung kann man ökonomisch weiter zerlegen in subdirekte unzerlegbare Faktoren. Man wird aber im allgemeinen auf diese Art nicht alle ökonomischen Zerlegungen in subdirekte unzerlegbare Faktoren erhalten. Es wird eine weitere Aufgabe dieses Paragraphen sein, die Beziehungen der direkten und der subdirekten Zerlegungen zu klären. Es wird sich ergeben, daß man nach der geschilderten Methode, zunächst direkt, dann subdirekt zu zerlegen, alle möglichen unzerlegbaren

Faktoren II. und III. Art (bzw. ihre erzeugenden Maximalstative) findet; nicht aber alle möglichen unzerlegbaren Faktoren I. Art.

Zunächst soll gezeigt wergden, daß über einem festen Sockeldurchschnitt im allgemeinen mehrere Stative existieren können. Betrachten wir z. B. eine kommutative Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Primzahlpotenzordnung p^α. Dann sind die Füße die Untergruppen von der Ordnung p. Subdirekt unzerlegbar sind unter den kommutativen Gruppen nur die zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung, da alle anderen sogar direkt zerlegbar sind. Es sei C ein Element von der höchsten Ordnung p^γ, $\mathfrak{C}$ die zyklische Gruppe der Potenzen von C. $\mathfrak{C}$ ist ein Stativ, da es nicht in einer umfassenderen Untergruppe mit dem gleichen Fuß, die ebenfalls zyklisch sein müßte, enthalten sein kann. Übrigens ist bekanntlich $\mathfrak{C}$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{G}$, also auch nach Satz 13 ein Stativ. Man setze $C^{p^{\gamma-1}} = F$. Dann ist $F^p = E$. $\mathfrak{F}$, die zyklische Gruppe der Potenzen von F, ist der Fuß von $\mathfrak{C}$. Es sei C' irgendein Element von niedrigerer Ordnung als C, das nicht in $\mathfrak{C}$ enthalten sei. $C'^{p^{\gamma-1}} = E$; dann ist $C'' = CC'$ ebenfalls von der Ordnung p^γ, also ein Stativ.

$$C''^{p^{\gamma-1}} = (CC')^{p^{\gamma-1}} = C^{p^{\gamma-1}} \cdot C'^{p^{\gamma-1}} = F \cdot E = F .$$

Also hat die Gruppe $\mathfrak{C}''$ der Potenzen von C'' denselben Fuß $\mathfrak{F}$ wie $\mathfrak{C}$. Es ist aber $\mathfrak{C}'' \neq \mathfrak{C}$, da $C'' \cdot C^{-1} = C'$ nicht in $\mathfrak{C}$ enthalten ist.

Satz 28: *Es seien $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ Füße II. oder III. Art von $\mathfrak{G}$;*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \; ; \qquad \mathfrak{F}_1 < \mathfrak{A}_1 \; ; \qquad \mathfrak{F}_2 < \mathfrak{A}_2 \; ;$$

Dann können $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nicht kohärent sein.

Beweis: Angenommen, es sei

$$\mathfrak{F}_1 \approx \mathfrak{F}_2 , \qquad F_1 < \mathfrak{F}_1 , \qquad F_2 < \mathfrak{F}_2 , \qquad F_1 \approx F_2 , \qquad G < \mathfrak{G} \; ;$$

dann muß sein

$$G F_1 G^{-1} \approx G F_2 G^{-1} .$$

Da $\mathfrak{F}_1$ nicht von I. Art, so sei $G = A_1 \times A_2$ nicht vertauschbar mit F_1, d. h.

$$G F_1 G^{-1} = (A_1 \times A_2) \cdot F_1 \cdot (A_1 \times A_2)^{-1} = A_1 F_1 A_1^{-1} \times A_2 E A_2^{-1} = A_1 F_1 A_1^{-1} = F_1' \neq F_1 .$$

Also ist auch

$$A_1 F_1 A_1^{-1} = F_1' \neq F_1 .$$

Andrerseits ist

$$A_1 F_2 A_1^{-1} = A_1 A_1^{-1} \times F_2 = E \times F_2 = F_2 .$$

Es müßte also sein, wenn man für G A_1 einsetzt

$$A_1 F_1 A_1^{-1} \approx A_1 F_2 A_1^{-1}$$

oder $F_1' \approx F_2$. Da aber $F_1 \approx F_2$ und $F_1 \neq F_1'$, so erhält man einen Widerspruch. Die Kohärenz zwischen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ist also nicht möglich.

Satz 29: *Ist*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n ,$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in direkte Faktoren, die direkt zerlegbar oder unzerlegbar sein können, und ist $\mathfrak{F}$ ein Fuß II. oder III. Art von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{F}$ Untergruppe eines wohlbestimmten der $\mathfrak{A}_\nu$, das auch die ganze Kohärente von $\mathfrak{F}$ enthält.

Beweis: Angenommen, der Satz wäre nicht richtig, so müßte es ein $\mathfrak{F}$ von II. oder III. Art geben, das durch Komponenten aus verschiedenen Faktoren, z. B. aus $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, dargestellt wird. $\mathfrak{F}_\nu$ sei die $\mathfrak{A}_\nu$-Komponente von $\mathfrak{F}$, dann ist $\mathfrak{F}_\nu$ Fuß von $\mathfrak{A}_\nu$ nach

DUDP Korollar 1 zu Hilfssatz 3 und 4 und infolgedessen $\mathfrak{F}_\nu$ Fuß von $\mathfrak{G}$ nach DUDP Korollar 2 zu Hilfssatz 1 und 2. Das Prinzip der unzerstörbaren Zuordnung würde für die Komponenten $\mathfrak{F}_1 \approx \mathfrak{F}_2 \approx \mathfrak{F}$ erfordern, was nach Satz 28 unmöglich ist, wenn $\mathfrak{F}$ von II. oder III. Art ist. $\mathfrak{F}$ kann also nicht von $\mathfrak{E}$ verschiedene Komponenten aus zwei verschiedenen Faktoren haben, muß also in einem Faktor $\mathfrak{A}_\nu$ unmittelbar vorkommen. In demselben Faktor $\mathfrak{A}_\nu$ müssen sämtliche zu $\mathfrak{F}$ kohärenten Füße von $\mathfrak{G}$ vorkommen; $\mathfrak{A}_\nu$ enthält also die Kohärente von $\mathfrak{F}$.

Hilfssatz 11: *Es sei* $\mathfrak{K}$ *der Kommutator,* $\mathfrak{Z}$ *das Zentrum von* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) = \mathfrak{E}$.

Behauptung: $\mathfrak{C} < \mathfrak{Z}$.

Beweis: Es sei $C < \mathfrak{C}$, $G < \mathfrak{G}$. Es ist wegen $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{G}$

$$GCG^{-1} < \mathfrak{C}\,, \qquad C^{-1} < \mathfrak{C}\,,$$

also

$$X = GCG^{-1}C^{-1} < \mathfrak{C},$$

worin X zur Abkürzung eingeführt ist. Andrerseits ist nach der Definition des Kommutators $X < \mathfrak{K}$, also, da $(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) = \mathfrak{E}$ sein sollte, $X = E$; mithin $GC = CG$. Da dies für alle $G < \mathfrak{G}$ gilt, so ist $C < \mathfrak{Z}$, also $\mathfrak{C} < \mathfrak{Z}$, was zu beweisen war.

Korollar 1 zu Hilfssatz 11: *Ein Fuß von* $\mathfrak{G}$, *der nicht im Kommutator von* $\mathfrak{G}$ *enthalten ist, ist stets von I. Art.*

Korollar 2 zu Hilfssatz 11: *Ein Fuß II. oder III. Art von* $\mathfrak{G}$ *ist stets im Kommutator von* $\mathfrak{G}$ *enthalten.* (Der Kommutator von $\mathfrak{G}$ kann auch Füße I. Art von $\mathfrak{G}$ enthalten.)

Es ist, wenn

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n$$

und $\mathfrak{K}$ der Kommutator von $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 \times \cdots \times \mathfrak{K}_n$$

worin $\mathfrak{K}_\nu = (\mathfrak{K}, \mathfrak{A}_\nu)$ der Kommutator von $\mathfrak{A}_\nu$. (Der Kommutator eines direkten Produktes ist eine Plenaruntergruppe.) Wenn $\mathfrak{F}$ ein Fuß II. oder III. Art von $\mathfrak{G}$ ist, $\mathfrak{F} < \mathfrak{A}_\nu$ nach Satz 29, so ist also nach Korollar 2 zu Hilfssatz 11 $\mathfrak{F} < (\mathfrak{K}, \mathfrak{A}_\nu) = \mathfrak{K}_\nu$. Beim Übergang zu einer zentral isomorphen direkten Zerlegung bleibt $\mathfrak{K}_\nu$, also $\mathfrak{F}$ ungeändert.

Ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{G})$ das Zentrum einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so bezeichne, wenn p eine Primzahl ist, die in der Ordnung von $\mathfrak{z}(\mathfrak{G})$ aufgeht, $\mathfrak{z}_p(\mathfrak{G})$ die umfassendste Untergruppe von $\mathfrak{z}(\mathfrak{G})$, deren Ordnung eine Potenz von p ist. Sind $p, q, r, \ldots$ die sämtlichen in der Ordnung von $\mathfrak{z}(\mathfrak{G})$ aufgehenden Primzahlen, so ist bekanntlich (wie für jede kommutative Gruppe.)

(1) $$\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{z}_p(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{z}_q(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{z}_r(\mathfrak{G}) \times \cdots$$

Es sei $\mathfrak{y}(\mathfrak{G})$ das Hyperzentrum von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{y}_p(\mathfrak{G})$ bezeichne die umfassendste Untergruppe von $\mathfrak{y}(\mathfrak{G})$, deren Ordnung eine Potenz von p ist. Dann ist nach DUDP Satz 14 auch

(2) $$\mathfrak{y}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{y}_p(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{y}_q(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{y}_r(\mathfrak{G}) \times \cdots$$

Hilfssatz 12: *Es sei*

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n$$

eine subdirekte Zerlegung von $\mathfrak{G}$; *die* $\mathfrak{B}_\nu$ *seien die Komponenten von* $\mathfrak{G}$. *Dann ist*

(3) $$\mathfrak{z}_p(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}\ ,\ \mathfrak{z}_p(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{z}_p(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{z}_p(\mathfrak{B}_n)) = (\mathfrak{G}\,, \mathfrak{Z}_p)\ ,$$

(4) $$\mathfrak{y}_p(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}\ ,\ \mathfrak{y}_p(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{y}_p(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{y}_p(\mathfrak{B}_n))\ .$$

Beweis: Die Bezeichnung $\mathfrak{Z}_p$ ist zur Abkürzung eingeführt. Setzt man ferner zur Abkürzung

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_n)$$

so lautete DUDP Hilfssatz 5:

(5) $$\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}) .$$

Die Ordnung eines Elementes eines direkten Produktes ist der kleinste Exponent, mit dem potenziert sämtliche Komponenten des Elementes gleich E werden; sie ist also das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen der Komponenten. Die Ordnung eines Elementes ist dann und nur dann eine Potenz der Primzahl p, wenn die Ordnungen sämtlicher Komponenten Potenzen von p sind. Es ist also

$$\mathfrak{z}_p(\mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}_p .$$

Da auch $\mathfrak{z}_p(\mathfrak{G}) < \mathfrak{G}$, so ist

(6) $$\mathfrak{z}_p(\mathfrak{G}) < (\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_p)) ,$$

Andrerseits ist mit Rücksicht auf (5)

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_p) < (\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{G})$$

und, da die Elemente von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_p)$ sämtlich von der Ordnung p^λ sind, so ist

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_p) < \mathfrak{z}_p(\mathfrak{G}).$$

Das liefert in Verbindung mit (6)

$$\mathfrak{z}_p(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_p) ,$$

was zu beweisen war. Die Behauptung (4) wird ganz ebenso bewiesen, indem man überall $\mathfrak{z}$ durch $\mathfrak{y}$ ersetzt und sich anstatt auf DUDP Hilfssatz 5 auf DUDP Satz 15 beruft.

Satz 30: *Es sei* $\mathfrak{S}$ *der Sockel von* $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 ; \qquad \mathfrak{S}_1 <_i \mathfrak{G} ; \qquad \mathfrak{S}_2 <_i \mathfrak{G} .$$

$\mathfrak{S}_2$ *enthalte keinen Fuß I. Art von der Ordnung* p, *wo* p *eine Primzahl ist, die in der Ordnung von* $\mathfrak{z}(\mathfrak{G})$ *aufgeht.* $\mathfrak{B}_1$ *sei ein Stativ über* $\mathfrak{S}_1$. *Ferner haben* $\mathfrak{z}_p(\mathfrak{G})$ *und* $\mathfrak{y}_p(\mathfrak{G})$ *die vor Hilfssatz* 12 *angegebene Bedeutung.*

Behauptung: $\mathfrak{z}_p(\mathfrak{G}) < \mathfrak{B}_1 ; \qquad \mathfrak{y}_p(\mathfrak{G}) < \mathfrak{B}_1 .$

Beweis: Die Kohärente I. Art, deren Füße von der Ordnung p sind, wird durch $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ nicht zerlegt, ist also voll in $\mathfrak{S}_1$ enthalten. Es sei $\mathfrak{B}_2$ ein Stativ über $\mathfrak{S}_2$. Wir führen dieselben Bezeichnungen ein wie im Beweise des Satzes 16: Es ist

$$\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 .$$

$$\widehat{\mathfrak{B}}_1 \overset{1}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}_1} ; \qquad \widehat{\mathfrak{B}}_2 \overset{2}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}_2} ;$$

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_1} \times \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_2}{\widehat{\mathfrak{C}}_2} ,$$

derart daß $\mathfrak{B}_1 \asymp \widehat{\mathfrak{C}}_2$, $\widehat{\mathfrak{B}}_2 \asymp \mathfrak{C}_1$. Es war

$$\widehat{\mathfrak{S}}_1 \overset{1}{\sim} \frac{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{B}_1} ; \qquad \widehat{\mathfrak{S}}_1 < \widehat{\mathfrak{C}}_1 ; \qquad \widehat{\mathfrak{S}}_1 \asymp \mathfrak{S}_2 ,$$

ebenso $\widehat{\mathfrak{S}}_2 \asymp \mathfrak{S}_1$. $\widehat{\mathfrak{S}}_1$ war Sockel von $\widehat{\mathfrak{B}}_1$. Die Art und Ordnung der Füße ist dieselbe in $\mathfrak{G}$ und in $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ nach DUDP Satz 9. Da $\mathfrak{S}_2$ keinen Fuß I. Art von der Ordnung p enthält, enthält $\widehat{\mathfrak{S}}_1$ als Sockel von $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ ebenfalls keinen Fuß I. Art der Ordnung p; mithin $\mathfrak{z}_p(\widehat{\mathfrak{B}}_1) = \widehat{\mathfrak{E}}$. Es ist nach Hilfssatz 12

$$\mathfrak{z}_p(\widehat{\mathfrak{G}}) = (\widehat{\mathfrak{G}} , \mathfrak{z}_p(\widehat{\mathfrak{B}}_1) \times \mathfrak{z}_p(\widehat{\mathfrak{B}}_2)) = (\widehat{\mathfrak{G}} , \widehat{\mathfrak{E}} \times \mathfrak{z}_p(\widehat{\mathfrak{B}}_2)) = (\widehat{\mathfrak{G}} , \mathfrak{z}_p(\widehat{\mathfrak{B}}_2)) < (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_2) = \widehat{\mathfrak{C}}_2 .$$

Da

$$\mathfrak{z}_p(\widehat{\mathfrak{G}}) \asymp \mathfrak{z}_p(\mathfrak{G}), \qquad \widehat{\mathfrak{C}}_2 \asymp \mathfrak{B}_1,$$

so ist

$$\mathfrak{z}_p(\mathfrak{G}) < \mathfrak{B}_1,$$

was zu beweisen war. Die Behauptung

$$\mathfrak{y}_p(\mathfrak{G}) < \mathfrak{B}_1$$

wird genau ebenso bewiesen.

Korollar zu Satz 30: *Es haben* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ *die gleiche Bedeutung wie in Satz* 30. $\mathfrak{S}_2$ *enthalte keinen Fuß I. Art.*

Behauptung: $\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) < \mathfrak{B}_1$; $\mathfrak{y}(\mathfrak{G}) < \mathfrak{B}_1$.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus den Formeln (1) und (2) vor Hilfssatz 12 und der Anwendung von Satz 30 auf sämtliche Faktoren des direkten Produktes.

Hilfssatz 13: *Es sei* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_5$. *Ferner sei* $\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2$ *ein Stativ in* $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{B}_2 < \mathfrak{A}_5$.

Behauptung: $\mathfrak{B}_2$ *ist Stativ in* $\mathfrak{G}$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$;

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{S}_1 ; \quad (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_5) = \mathfrak{S}_5 ; \quad (\mathfrak{S}, \mathfrak{B}_4) = \mathfrak{S}_4 ; \quad (\mathfrak{S}, \mathfrak{B}_2) = \mathfrak{S}_2 ; \quad \mathfrak{S}_2 < \mathfrak{S}_5 .$$

Es ist nach Satz 19

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_5 ; \qquad \mathfrak{S}_4 = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2;$$

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}_4) \cdot (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_5) = \mathfrak{S}_4 \cdot \mathfrak{S}_5 = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_5 = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_5 = \mathfrak{S}.$$

$\mathfrak{A}_5$ ist Stativ in $\mathfrak{G}$ nach Satz 13. Die Voraussetzungen zu Satz 26 sind also für die beiden Stative $\mathfrak{B}_4$ und $\mathfrak{A}_5$ erfüllt; mithin ist nach dem Korollar zu Satz 26

$$(\mathfrak{B}_4, \mathfrak{A}_5) = (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2, \mathfrak{A}_5) = \mathfrak{B}_2$$

Stativ in $\mathfrak{G}$.

Hilfssatz 14: *Es sei*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_5 ; \qquad \mathfrak{B}_2 < \mathfrak{A}_5 .$$

Wenn $\mathfrak{B}_2$ *Stativ in* $\mathfrak{G}$, *so ist es auch Stativ in* $\mathfrak{A}_5$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$.

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{S}_1 ; \quad (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_5) = \mathfrak{S}_5 ; \quad (\mathfrak{S}_5, \mathfrak{B}_2) = \mathfrak{S}_2 .$$

Angenommen, $\mathfrak{B}_2$ wäre nicht Stativ in $\mathfrak{A}_5$, so gäbe es $\mathfrak{X}$, so daß

$$\mathfrak{X} <_i \mathfrak{A}_5 , \quad \mathfrak{B}_2 < \mathfrak{X} , \quad \mathfrak{B}_2 \neq \mathfrak{X} , \quad (\mathfrak{X}, \mathfrak{S}_5) = \mathfrak{S}_2 ,$$

wobei benutzt ist, daß nach Korollar 1 zu Satz 12 $\mathfrak{S}_5$ auch Sockel von $\mathfrak{A}_5$ ist. Dann ist auch $\mathfrak{B}_2 <_i \mathfrak{G}$; $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}$ nach DUDP Korollar 3 zu Satz 2. Ferner ist

$$(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{B}_2, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{B}_2, \mathfrak{S}_5) = \mathfrak{S}_2 .$$

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{X}, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{X}, \mathfrak{S}_5) = \mathfrak{S}_2 .$$

Also wäre $\mathfrak{B}_2$ auch nicht Stativ in $\mathfrak{G}$. Wenn also $\mathfrak{B}_2$ Stativ in $\mathfrak{G}$ ist, so muß es auch Stativ in $\mathfrak{A}_5$ sein.

Umkehrung zu Hilfssatz 14: *Es sei* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{B}_2$ *Stativ in* $\mathfrak{A}_5$.

Behauptung: $\mathfrak{B}_2$ *ist Stativ in* $\mathfrak{G}$.

Beweis: Es sei wieder $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$;

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{S}_1 ; \quad (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_5) = \mathfrak{S}_5 ; \quad (\mathfrak{B}_2, \mathfrak{S}_5) = \mathfrak{S}_2 .$$

Es wird wieder gezeigt

$$(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{B}_2, \mathfrak{S}_5) = \mathfrak{S}_2 .$$

Man setze

$$\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_4 \; ; \qquad \mathfrak{B}_4 = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2 \; .$$

Es soll zunächst gezeigt werden, daß $\mathfrak{B}_4$ Stativ in $\mathfrak{G}$ ist.

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}_1} = \frac{\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_5}{\mathfrak{A}_1} \underset{1}{\sim} \mathfrak{A}_5 \; .$$

$$\frac{\mathfrak{B}_4}{\mathfrak{A}_1} = \frac{\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_1} \underset{1}{\sim} \mathfrak{B}_2 \; .$$

Also ist, da die Stativeigenschaft durch einen Isomorphismus übertragen wird, $\frac{\mathfrak{B}_4}{\mathfrak{A}_1}$ Stativ in $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}_1}$. $\mathfrak{A}_1$ ist als direkter Faktor Stativ in $\mathfrak{G}$ nach Satz 13. Also ist nach Satz 21 auch $\mathfrak{B}_4$ Stativ in $\mathfrak{G}$. Dann ist aber $\mathfrak{B}_2$ Stativ in $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 13.

Satz 31: *Es sei* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_5$; $\mathfrak{S}$ *der Sockel von* $\mathfrak{G}$;

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{S}_1 \; ; \qquad (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_5) = \mathfrak{S}_5 \; ; \qquad \mathfrak{S}_5 = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3 \; ; \qquad \mathfrak{S}_2 <_i \mathfrak{G} \; ; \qquad \mathfrak{S}_3 <_i \mathfrak{G} \; .$$

$\mathfrak{S}_3$ *enthalte keinen Fuß I. Art von* $\mathfrak{G}$. *Man setze* $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_4$. $\mathfrak{B}_4$ *sei ein Stativ über* $\mathfrak{S}_4$ *in* $\mathfrak{G}$.

Behauptung:

$$\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2,$$

wo $\mathfrak{B}_2$ *ein Stativ über* $\mathfrak{S}_2$ *in* $\mathfrak{A}_5$.

Beweis: Es ist $\mathfrak{B}_4 <_i \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_5$, also nach DUDP Satz 2

$$\mathfrak{B}_4 = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \underset{\sim}{\times} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$$

wobei

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1}\right) , \qquad \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_5}{\mathfrak{C}_2}\right) .$$

$\mathfrak{A}_5$ ist als direkter Faktor Stativ in $\mathfrak{G}$ nach Satz 13. Es ist

$$\mathfrak{S}_4 \cdot \mathfrak{S}_5 = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_5 = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_5 = \mathfrak{S} .$$

Die Voraussetzungen des Satzes 26 sind also für die Stative $\mathfrak{B}_4$ und $\mathfrak{A}_5$ erfüllt; also ist nach dem Korollar zu Satz 26

$$(\mathfrak{B}_4, \mathfrak{A}_5) = \mathfrak{C}_2$$

ein Stativ, das mit $\mathfrak{B}_2$ bezeichnet werde. Es sei $\mathfrak{B}_3$ ein Stativ über $\mathfrak{S}_3$. Man kann nun $\mathfrak{A}_5$ nach Satz 16 darstellen. Es wird

$$\widehat{\mathfrak{B}}_2 \underset{2}{\sim} \frac{\mathfrak{A}_5}{\mathfrak{B}_2} \; ; \qquad \widehat{\mathfrak{B}}_3 \underset{3}{\sim} \frac{\mathfrak{A}_5}{\mathfrak{B}_3} \; .$$

$$\mathfrak{A}_5 \asymp \widehat{\mathfrak{A}}_5 = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_2}{\widehat{\mathfrak{C}}_2} \underset{\sim}{\times} \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_3}{\widehat{\mathfrak{C}}_3} \; .$$

Diese Darstellung ist ökonomisch nach Satz 16. Diese denke man sich ökonomisch weiterzerlegt in unzerlegbare subdirekte Faktoren nach Satz 14. Die unzerlegbaren Faktoren, in die $\widehat{\mathfrak{B}}_2$ zerfällt, sind nach DUDP Satz 9 von der gleichen Art wie die benutzten Füße von $\mathfrak{A}_5$. Da aber $\widehat{\mathfrak{C}}_2 \asymp \mathfrak{B}_3$ und $(\mathfrak{B}_3, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_3$, so enthält nach der Voraussetzung über $\mathfrak{S}_3$ auch $\widehat{\mathfrak{B}}_2$ nur Füße II. und III. Art. Also $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{B}}_2) = \widehat{\mathfrak{E}}$. Es war aber $\widehat{\mathfrak{B}}_2 \underset{2}{\sim} \frac{\mathfrak{A}_5}{\mathfrak{B}_2}$; also ist auch $\mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_5}{\mathfrak{B}_2}\right) = \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2}$. Es ist aber nach DUDP Satz 2

$$\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} = \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{V}_2} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_5}{\mathfrak{V}_2}\right) = \frac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_2} ,$$

also

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{C}_2 .$$

Es muß wegen $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$ auch $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}_1$ sein, also

$$\mathfrak{V}_4 = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{V}_2 ,$$

worin $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{A}_1$. Es ist nach Satz 19

$$(\mathfrak{S} , \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{V}_2) = (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_1) \times (\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_2) = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_4 .$$

$$\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{V}_2 < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{V}_2 .$$

Die Bedingung des Stativs ist also nur für $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1$ erfüllt, mithin ist

$$\mathfrak{V}_4 = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{V}_2 ,$$

was zu beweisen war. Dann ist aber auch $\mathfrak{V}_2$ Stativ in $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 13 und $\mathfrak{V}_2$ Stativ in $\mathfrak{A}_5$ nach Hilfssatz 14.

Korollar 1 zu Satz 31: *Es mögen alle Buchstaben die gleiche Bedeutung haben wie in Satz* 31. *Es sei*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_5 = \bar{\mathfrak{A}}_1 \times \mathfrak{A}_5 .$$

Dann ist auch

$$\mathfrak{V}_4 = \bar{\mathfrak{A}}_1 \times \mathfrak{V}_2 .$$

Beweis: Es ist $\mathfrak{A}_1 \simeq \bar{\mathfrak{A}}_1$ (zentral isomorph) [3]). Da nach dem Korollar zu Satz 30

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z} < \mathfrak{V}_4 ,$$

so ist

$$\bar{\mathfrak{A}}_1 < \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{A}_1 < \mathfrak{V}_4 ,$$

also, da

$$\bar{\mathfrak{A}}_1 < \mathfrak{V}_4 < \bar{\mathfrak{A}}_1 \times \mathfrak{A}_5 = \mathfrak{G} ,$$

so ist nach DUDP Korollar 3 zu Satz 1

$$\mathfrak{V}_4 = \bar{\mathfrak{A}}_1 \times (\mathfrak{V}_4 , \mathfrak{A}_5) = \bar{\mathfrak{A}}_1 \times \mathfrak{V}_2 ,$$

was zu beweisen war.

Korollar 2 zu Satz 31: Es sei speziell $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{F}_3$ ein Fuß II. oder III. Art, $\mathfrak{A}_5$ der unzerlegbare direkte Faktor von $\mathfrak{G}$, in dem $\mathfrak{F}_3$ nach Satz 29 enthalten ist, dann ist $\mathfrak{S}_4$ Komplementärfuß zu $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{V}_4$ Maximalstativ. Der einfüßige Faktor ist

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{V}_4} = \frac{\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_5}{\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{V}_2} \sim \frac{\left(\frac{\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_5}{\mathfrak{A}_1}\right)}{\left(\frac{\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{V}_2}{\mathfrak{A}_1}\right)} \sim \frac{\mathfrak{A}_5}{\mathfrak{V}_2} .$$

Ein einfüßiger subdirekter Faktor II. oder III. Art von $\mathfrak{G}$ *ist also ein einfüßiger subdirekter Faktor des direkt unzerlegbaren Faktors von* $\mathfrak{G}$, *in dem die zum erzeugenden Maximalstativ komplementären Füße auftreten.*

Oder mit anderen Worten:

Betrachtet man alle diejenigen speziellen ökonomischen Zerlegungen einer Gruppe in unzerlegbare subdirekte Faktoren, die dadurch entstehen, daß man auf alle möglichen

---

[3]) Journ. f. Math. **139** (1911), S. 293. Hilfssatz des Herrn Otto Schmidt, wiedergegeben Journ. f. Math. **153** (1924), S. 132. Siehe auch DUDP Anm. 2.

Arten zunächst in direkt unzerlegbare Faktoren und diese subdirekt weiter zerlegt, so kommen alle überhaupt vorhandenen einfüßigen Faktoren II. und III. Art vor.

Definition: *Ein Stativ in einer Gruppe heißt „einzig" wenn es kein anderes Stativ mit dem gleichen Sockeldurchschnitt gibt.*

Satz 32: *Wenn*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_5 , \qquad \mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z} < \mathfrak{A}_1 ,$$

dann ist $\mathfrak{A}_1$ *ein einziges Stativ.*

Beweis: Die Voraussetzung ist, da

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_1) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_5),$$

äquivalent mit $\mathfrak{z}(\mathfrak{A}_5) = \mathfrak{E}$; $\mathfrak{A}_5$ enthält also keinen Fuß I. Art. Man wende Satz 31 an für den Spezialfall $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{E}$; $\mathfrak{S}_5 = \mathfrak{S}_3$; also $\mathfrak{S}_4 = \mathfrak{S}_1$. $\mathfrak{V}_4$ sei ein Stativ über $\mathfrak{S}_1$. Es ist auch $\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{E}$, da andernfalls $(\mathfrak{V}_2, \mathfrak{S}_5) = \mathfrak{S}_2 \neq \mathfrak{E}$ wäre. Mithin ist $\mathfrak{V}_4 = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{A}_1$. Es gibt also über $\mathfrak{S}_1$ nur das einzige Stativ $\mathfrak{A}_1$.

Oder man beweise Satz 32 direkt ohne Benutzung von Satz 31. Es sei $\mathfrak{V}_4$ irgend ein Stativ über $\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_1)$. Es ist $\mathfrak{V}_4 <_i \mathfrak{G}$, mithin nach DUDP Satz 2

$$\mathfrak{V}_4 = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \asymp \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} ,$$

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1}\right), \qquad \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_5}{\mathfrak{C}_2}\right) .$$

Es ist

$$\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_1) < (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{V}_4) = \mathfrak{C}_1 .$$

Es muß $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{E}$ sein. Wäre das nicht der Fall, so wäre

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{C}_2) = (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{C}_2) = (\mathfrak{S}_5, \mathfrak{C}_2) = \mathfrak{S}_2 \neq \mathfrak{E} ;$$

$$\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 < \mathfrak{V}_4 ; \qquad (\mathfrak{S}, \mathfrak{V}_4) \neq \mathfrak{S}_1 ,$$

was der Definition des Stativs über $\mathfrak{S}_1$ widerspricht. Es ist also $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{E}$, mithin

$$\mathfrak{B}_2 < \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_5) = \mathfrak{E} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{E} ,$$

also

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} = \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_1} \sim \mathfrak{E} ; \qquad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}_1 ; \qquad \mathfrak{V}_4 = \mathfrak{C}_1 < \mathfrak{A}_1 .$$

Da $(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{S}_1$, ist $\mathfrak{A}_1$ die umfassendste invariante Untergruppe mit dem Sockeldurchschnitt $\mathfrak{S}_1$. Mithin ist $\mathfrak{V}_4 = \mathfrak{A}_1$.

Korollar 1 zu Satz 32: *Es sei*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_5 = \bar{\mathfrak{A}}_1 \times \mathfrak{A}_5 ; \qquad \mathfrak{z}(\mathfrak{G}) < \mathfrak{A}_1 .$$

Dann ist nach Korollar 1 *zu Satz* 31 *auch*

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{V}_4 = \bar{\mathfrak{A}}_1 \times \mathfrak{V}_2 = \bar{\mathfrak{A}}_1;$$

d. h. $\mathfrak{A}_5$ *hat nur einen einzigen Komplementärfaktor.*

Das stimmt damit überein, daß, da $\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) < \mathfrak{A}_1$ ist, $\mathfrak{A}_1$ nur sich selbst zentral isomorph sein kann.

Korollar 2 zu Satz 32: *Wenn* $\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$, *dann ist* ($\mathfrak{G}$ identisch eindeutig in direkt unzerlegbare Faktoren zerlegbar [4]) und) *jeder direkte Faktor von* $\mathfrak{G}$ *ein einziges Stativ.*

Satz 33: *Es sei* $\mathfrak{S}$ *der Sockel von* $\mathfrak{G}$.

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 ; \qquad \mathfrak{S}_1 <_i \mathfrak{G} ; \qquad \mathfrak{S}_2 <_i \mathfrak{G} .$$

$\mathfrak{V}_1$ *sei ein Stativ über* $\mathfrak{S}_1$. $\mathfrak{S}_2$ *enthalte nur Füße III. Art von* $\mathfrak{G}$.

---

[4]) Journ f. Math. **139**, S. 304 oder **153**, S. 140.

Behauptung: $\mathfrak{V}_1$ *ist ein einziges Stativ.*

Beweis: $\mathfrak{S}_2$ ist das Produkt von vollen Kohärenten, also besteht auch der Komplementärfaktor im Sockel $\mathfrak{S}_1$ aus dem Produkt der übrigen Kohärenten und ist durch $\mathfrak{S}_2$ eindeutig bestimmt. Es sei $\overline{\mathfrak{V}}_1$ die invariante Untergruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, die mit jedem Elemente von $\mathfrak{S}_2$ vertauschbar sind. Da ein Fuß III. Art außer E keine invarianten Elemente besitzt, so enthält $\mathfrak{S}_2$ außer E kein Element, das mit seinen sämtlichen Elementen vertauschbar ist; es ist also $(\overline{\mathfrak{V}}_1, \mathfrak{S}_2) = \mathfrak{E}$. Es werde für „elementweise vertauschbar mit" abgekürzt „ewvm" geschrieben. Es ist $\mathfrak{S}_1$ ewvm $\mathfrak{S}_2$, also $\mathfrak{S}_1 < \overline{\mathfrak{V}}_1$. Es ist

$$(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{S}_2) = (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_2) = (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) = \mathfrak{E};$$

mithin $\mathfrak{V}_1$ ewvm $\mathfrak{S}_2$; $\quad \mathfrak{V}_1 < \overline{\mathfrak{V}}_1$. Aus

$$\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{S}) < (\overline{\mathfrak{V}}_1, \mathfrak{S}) < \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$$

ergibt sich unter Benutzung von DUDP Korollar 3 zu Satz 1

$$(\overline{\mathfrak{V}}_1, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_1 \times \big((\overline{\mathfrak{V}}_1, \mathfrak{S}), \mathfrak{S}_2\big) = \mathfrak{S}_1 \times (\overline{\mathfrak{V}}_1, \mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{E} = \mathfrak{S}_1.$$

Wäre $\mathfrak{V}_1 \neq \overline{\mathfrak{V}}_1$, so hätte also $\mathfrak{V}_1$ nicht die Stativeigenschaft. Es ist mithin $\mathfrak{V}_1 = \overline{\mathfrak{V}}_1$. Also gibt es außer $\overline{\mathfrak{V}}_1$ kein anderes Stativ über $\mathfrak{S}_1$. $\mathfrak{V}_1 = \overline{\mathfrak{V}}_1$ ist ein einziges Stativ.

Korollar zu Satz 33: *Einzige Stative sind insbesondere das Stativ über dem Produkt sämtlicher Füße I. und II. Art, ferner die Maximalstative über den Komplementärfüßen von Füßen III. Art. Alle einfüßigen Faktoren III. Art einer Zerlegung in unzerlegbare Faktoren stehen also subidentisch eindeutig fest*, wie schon in DUDP Korollar 1 zu Satz 17 bemerkt worden war. Hieraus war in DUDP Korollar 2 zu Satz 17 geschlossen worden:

Sind alle Füße einer Gruppe von III. Art, so ist sie identisch eindeutig subdirekt zerlegbar.

§ 6. Die kanonische Zerlegung einer Gruppe in Kohärenzfaktoren.

Man bilde folgendermaßen eine subdirekte Darstellung einer Gruppe $\mathfrak{G}$. Die erzeugenden invarianten Untergruppen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n$ seien die sämtlichen Maximalstative von $\mathfrak{G}$. Man notiere also in der in DUDP im Beweise des Satzes 3 angegebenen Weise bei jedem Elemente von $\mathfrak{G}$ die Komponenten nach sämtlichen einfüßigen bodenständigen Faktoren. Sodann fasse man in der Weise, wie zu Beginn von DUDP § 3 erläutert, sämtliche untereinander kohärenten Faktoren zu einem Faktor zusammen. Die so entstandene Zerlegung möge die „erste kanonische Zerlegung" heißen. Da man unter den sämtlichen untereinander kohärenten bodenständigen Faktoren immer solche aussuchen kann, die zusammen in einer *ökonomischen* Zerlegung vorkommen, so ist deren Durchschnitt nach Satz 15 wieder ein Stativ, und zwar über dem Produkte sämtlicher übrigen Kohärenten, das die „Komplementärkohärente" der gegebenen Kohärente heißen möge. Jedes Maximalstativ kann in einer ökonomischen Zerlegung in unzerlegbare subdirekte Faktoren vorkommen. Man erhält also als erzeugende invariante Untergruppe des zusammengefaßten Faktors den Durchschnitt sämtlicher Stative über der Komplementärkohärente. Der Durchschnitt sämtlicher Stative über einer invarianten Untergruppe von $\mathfrak{G}$ möge „Stativdurchschnitt" über der invarianten Untergruppe heißen. Die erzeugenden invarianten Untergruppen der ersten kanonischen Zerlegung sind also die Stativdurchschnitte über den Komplementärkohärenten.

Ferner betrachten wir eine zweite Zerlegung von $\mathfrak{G}$. Man wende das in § 2 auseinandergesetzte Verfahren der fortgesetzten meromorphen Zerlegung an, jedoch mit dem Unterschiede, daß der Sockel nicht mehr als direktes Produkt von Füßen dargestellt

wird, sondern nur als direktes Produkt der Kohärenten. Diese Zerlegung des Sockels ist identisch eindeutig nach MIU Satz 3. Beim ersten Schritt wird $\mathfrak{G}$ meromorph zerlegt und als Block die Zerlegung des Sockels von $\mathfrak{G}$ in Kohärenten benutzt, jeder Faktor wieder ebenso weiter behandelt, bis das Verfahren nicht mehr fortsetzbar ist, d. h. bis alle Faktoren „Kohärenzgruppen" sind, d. h. nur eine einzige Kohärente besitzen. Die ursprünglichen Kohärenten können sich dabei durch Hinzutreten weiterer zu ihnen kohärenter Füße der Faktorgruppen erweitern. Es wird sich herausstellen, daß nur die durch Erweiterung der ursprünglichen Kohärenten entstandenen Faktoren übrig bleiben, und daß alle anderen Faktoren als schwebende fortgelassen werden können. Diese Zerlegung, die „fortgesetzte meromorphe Zerlegung nach Kohärenten", möge die „zweite kanonische Zerlegung" heißen. Die Bezeichnung ist nur eine vorläufige. Das Ziel dieses Paragraphen ist es, zu zeigen, daß die beiden kanonischen Zerlegungen miteinander identisch sind.

Hilfssatz 15: *Es sei* $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$; $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}_2$ *seien Füße von* $\mathfrak{G}$.

$$(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{D}) = \mathfrak{E}; \quad (\mathfrak{F}_2, \mathfrak{D}) = \mathfrak{E}; \quad \mathfrak{F}_1 \approx \mathfrak{F}_2 \text{ in } \mathfrak{G}.$$

Man bilde die bodenständigen Füße von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ $\frac{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$ *und* $\frac{\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$; *und zwar sei* $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{D} \neq \mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{D}$.

Behauptung: Die Kohärenz bleibt erhalten. Es ist in $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$

$$\frac{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} \approx \frac{\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}.$$

Beweis: Vorbemerkung: Es ist

$$(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{E}.$$

Wäre $\mathfrak{F}_2 < \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{D}$, so wäre $\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{D} < \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{D}$, also wegen der Gleichheit der Ordnungen $\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{D} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{D}$ entgegen der Voraussetzung. Es ist also

$$(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{D}) = \mathfrak{E}; \quad \mathfrak{F}_2 \cdot \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{D}.$$

Folglich ist, da die direkte Multiplikation assoziativ ist,

$$(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{E}.$$

Es sei nun

$$F_1 < \mathfrak{F}_1; \quad F_2 < \mathfrak{F}_1; \quad G < \mathfrak{G}.$$

Wenn $F_1 \approx F_2$, so ist auch

$$G F_1 G^{-1} \approx G F_2 G^{-1}.$$

Man mache in der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ die Zuordnung

$$F_1 \mathfrak{D} \approx F_2 \mathfrak{D}.$$

Es ist

$$G\mathfrak{D} \cdot F_1 \mathfrak{D} \cdot G^{-1}\mathfrak{D} = G F_1 G^{-1} \cdot \mathfrak{D} \approx G F_2 G^{-1} \cdot \mathfrak{D} = G\mathfrak{D} \cdot F_2 \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{D};$$

d. h. die Kohärenzbedingung

$$\frac{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} \approx \frac{\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$$

ist in der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ erfüllt, was zu beweisen war.

Hilfssatz 16: *Es sei* $\mathfrak{S}$ *der Sockel von* $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{K}$ *sei eine Kohärente,* $\mathfrak{L}$ *sei das Produkt aller übrigen Kohärenten, so daß* $\mathfrak{S} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$. $\mathfrak{D}$ *sei kein Stativ in* $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$; $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{L}$.

$\mathfrak{F}_1$ *sei ein Fuß von* $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{F}_1 < \mathfrak{K}$. *Dann ist* $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}_1) = \mathfrak{E}$ *nach Hilfssatz* 3. $\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}_1}{\mathfrak{D}}$ *ist ein bodenständiger Fuß von* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$. $\frac{\overline{\mathfrak{F}}_2}{\mathfrak{D}}$ *sei ein nicht bodenständiger Fuß von* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$. *Ein solcher existiert nach Satz* 3, *da* $\mathfrak{D}$ *kein Stativ ist. Es sei*

$$\frac{\overline{\mathfrak{F}}_2}{\mathfrak{D}} \approx \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}_1}{\mathfrak{D}} .$$

Behauptung: *Es gibt ein Stativ* $\mathfrak{B}$ *über* $\mathfrak{D}$, *das* $\overline{\mathfrak{F}}_2$ *nicht enthält.*

Beweis: Es sei $\widehat{\mathfrak{B}} \sim \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$. Ferner sei

$$\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}_1}{\mathfrak{D}} \sim \widehat{\mathfrak{F}}_1 < \widehat{\mathfrak{B}} \; ; \qquad \frac{\overline{\mathfrak{F}}_2}{\mathfrak{D}} \sim \widehat{\mathfrak{F}}_2 < \widehat{\mathfrak{B}} \; ;$$

also $\widehat{\mathfrak{F}}_1 \approx \widehat{\mathfrak{F}}_2$. Man bilde

$$\widehat{\mathfrak{F}}_3 = \frac{\widehat{\mathfrak{F}}_1}{\widehat{\mathfrak{E}}} \times\!\!\!\approx \frac{\widehat{\mathfrak{F}}_2}{\widehat{\mathfrak{E}}} .$$

Es ist $\widehat{\mathfrak{F}}_3 <_i \widehat{\mathfrak{B}}$. Wenn $\widehat{F}_3 < \widehat{\mathfrak{F}}_3$ so ist

$$\widehat{F}_3 = \widehat{F}_1 \times \widehat{F}_2 .$$

Die lateinischen Buchstaben bezeichnen Elemente der mit deutschen Buchstaben bezeichneten Gruppen. Es sei $\widehat{\mathfrak{F}}_3 = \frac{\overline{\mathfrak{F}}_3}{\mathfrak{D}}$; also

$$\widehat{F}_3 \sim \overline{F}_3 \cdot \mathfrak{D} = F_1 \mathfrak{D} \cdot \overline{F}_2 \mathfrak{D} .$$

Es war $\frac{\overline{\mathfrak{F}}_2}{\mathfrak{D}}$ ein nicht bodenständiger Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$, mithin

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{F}}_2}{\mathfrak{D}} , \quad \frac{\mathfrak{K} \times \mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}\right) = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} .$$

Es war

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{L} < \mathfrak{K} \times \mathfrak{D} .$$

Folglich

$$(\overline{\mathfrak{F}}_2, \mathfrak{S}) < (\overline{\mathfrak{F}}_2, \mathfrak{K} \times \mathfrak{D}) = \mathfrak{D} \; ; \qquad (\overline{\mathfrak{F}}_2, \mathfrak{S}) < (\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{L} \; ;$$

$$\mathfrak{L} < \mathfrak{D} < \overline{\mathfrak{F}}_2 \; ; \quad \mathfrak{L} < \mathfrak{S} \; ; \quad \mathfrak{L} < (\overline{\mathfrak{F}}_2, \mathfrak{S}) \; ; \quad \text{also} \quad (\overline{\mathfrak{F}}_2, \mathfrak{S}) = \mathfrak{L} .$$

Es ist $(\overline{\mathfrak{F}}_2, \mathfrak{K}) = \mathfrak{E}$ nach Hilfssatz 3. Also

$$\mathfrak{K} \cdot \overline{\mathfrak{F}}_2 = \mathfrak{K} \times \overline{\mathfrak{F}}_2 .$$

Es war $\mathfrak{F}_1 < \mathfrak{K}$. Also ist auch

$$\mathfrak{F}_1 \cdot \overline{\mathfrak{F}}_2 = \mathfrak{F}_1 \times \overline{\mathfrak{F}}_2 \; ; \qquad \overline{F}_3 \mathfrak{D} = F_1 \cdot \overline{F}_2 \mathfrak{D} = F_1 \times \overline{F}_2 \mathfrak{D} ,$$

folglich

$$(1) \qquad \overline{\mathfrak{F}}_3 = \frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{E}} \times\!\!\!\sim \frac{\overline{\mathfrak{F}}_2}{\mathfrak{D}} .$$

Es sei $\mathfrak{V}$ ein Stativ über $\overline{\mathfrak{F}}_3$. Angenommen, es wäre auch $\overline{\mathfrak{F}}_2 < \mathfrak{V}$, so wäre

$$\overline{\mathfrak{F}}_3 \cdot \overline{\mathfrak{F}}_2 = \mathfrak{F}_1 \times \overline{\mathfrak{F}}_2 < \mathfrak{V} ,$$

also $\mathfrak{F}_1 < \mathfrak{V}$, folglich $\mathfrak{F}_1 < (\mathfrak{V}, \mathfrak{S})$. Da $\mathfrak{V}$ Stativ über $\overline{\mathfrak{F}}_3$ ist, so ist

$$(2) \qquad \mathfrak{F}_1 < (\mathfrak{V}, \mathfrak{S}) = (\bar{\mathfrak{F}}_3, \mathfrak{S}) .$$

Da in (1) die erste Komponente $< \mathfrak{F}_1 < \mathfrak{S}$ ist, so muß auch die zweite Komponente von $(\bar{\mathfrak{F}}_3, \mathfrak{S}) < \mathfrak{S}$ sein, d. h. $< (\bar{\mathfrak{F}}_2, \mathfrak{S})$. Da aber

$$(\bar{\mathfrak{F}}_2, \mathfrak{S}) = \mathfrak{L} < \mathfrak{D} ,$$

so kommen in $(\bar{\mathfrak{F}}_3, \mathfrak{S})$ nur Elemente des Blockes von (1) $\mathfrak{E} \times \mathfrak{D}$ vor; also

$$(\bar{\mathfrak{F}}_3, \mathfrak{S}) < (\bar{\mathfrak{F}}_2, \mathfrak{S}) = \mathfrak{L} .$$

Da andrerseits

$$\mathfrak{L} < \mathfrak{D} < \bar{\mathfrak{F}}_3 , \qquad \mathfrak{L} < \mathfrak{S} , \qquad \mathfrak{L} < (\bar{\mathfrak{F}}_3, \mathfrak{S}) ,$$

so ist

$$(\bar{\mathfrak{F}}_3, \mathfrak{S}) = \mathfrak{L} ,$$

also nach (2) $\mathfrak{F}_1 < \mathfrak{L}$.

Es ist aber

$$(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{L}) < (\mathfrak{K}, \mathfrak{L}) = \mathfrak{E} .$$

Die Annahme, daß $\bar{\mathfrak{F}}_2 < \mathfrak{V}$, führt also zu einem Widerspruch; mithin ist $\bar{\mathfrak{F}}_2$ nicht in $\mathfrak{V}$ enthalten.

Korollar zu Hilfssatz 16: *Es mögen alle Buchstaben die gleiche Bedeutung haben wie in Hilfssatz* 16, $\mathfrak{U}$ *sei der Stativdurchschnitt über* $\mathfrak{D}$. *Dann ist* $\bar{\mathfrak{F}}_2$ *nicht in* $\mathfrak{U}$ *enthalten.*

Hilfssatz 17: *Die Bedeutung sämtlicher Buchstaben sei dieselbe wie in Hilfssatz* 16; *nur wird jetzt vorausgesetzt, daß für alle* $\mathfrak{F}_1 < \mathfrak{K}$

$$\frac{\bar{\mathfrak{F}}_2}{\mathfrak{D}} \text{ und } \frac{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$$

nicht kohärent in $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ *seien.* $\mathfrak{V}$ *sei ein beliebiges Stativ über* $\mathfrak{D}$.

Behauptung: $\bar{\mathfrak{F}}_2 < \mathfrak{V}$.

Beweis: Es sei $\hat{\mathfrak{S}}$ der Sockel von $\hat{\mathfrak{V}}$. $\hat{\mathfrak{S}} \sim \frac{\bar{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{D}}$. Dann ist nach Hilfssatz 8

$$\frac{\bar{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{K}}{\mathfrak{D}} \times \frac{(\bar{\mathfrak{S}}, \mathfrak{V})}{\mathfrak{D}} .$$

Man gehe zu den isomorph zugeordneten Untergruppen von $\hat{\mathfrak{V}}$ über:

$$\frac{\mathfrak{D} \times \mathfrak{K}}{\mathfrak{D}} \sim \hat{\mathfrak{K}}' ; \qquad \left(\frac{\bar{\mathfrak{S}}, \mathfrak{V}}{\mathfrak{D}}\right) \sim \hat{\mathfrak{S}}_2 .$$

Dann wird

$$\hat{\mathfrak{S}} = \hat{\mathfrak{K}}' \times \hat{\mathfrak{S}}_2 .$$

Es ist $\hat{\mathfrak{F}}_1 < \hat{\mathfrak{K}}'$; $\hat{\mathfrak{F}}_2$ ist inkohärent zu allen $\hat{\mathfrak{F}}_1 < \hat{\mathfrak{K}}'$. $\hat{\mathfrak{F}}_2$ kann also in $\hat{\mathfrak{K}}' \times \hat{\mathfrak{S}}_2$ keine von $\hat{\mathfrak{E}}$ verschiedene $\hat{\mathfrak{K}}'$-Komponente haben; also $\hat{\mathfrak{F}}_2 < \hat{\mathfrak{S}}_2$; folglich

$$\frac{\bar{\mathfrak{F}}_2}{\mathfrak{D}} < \frac{(\bar{\mathfrak{S}}, \mathfrak{V})}{\mathfrak{D}} ; \qquad \bar{\mathfrak{F}}_2 < (\bar{\mathfrak{S}}, \mathfrak{V}) < \mathfrak{V} ,$$

was zu beweisen war.

Korollar 1 zu Hilfssatz 17: *Ist* $\mathfrak{U}$ *der Stativdurchschnitt über* $\mathfrak{D}$, *so ist, da Hilfssatz* 17 *für alle* $\mathfrak{V}$ *über* $\mathfrak{D}$ *gilt,*

$$\bar{\mathfrak{F}}_2 < \mathfrak{U} .$$

Korollar 2 zu Hilfssatz 16 und 17: *Es sei* $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{U}$ *der Stativdurchschnitt über* $\mathfrak{D}$; $(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{L}$; $\mathfrak{S} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$. $\mathfrak{K}$ *sei eine Kohärente von* $\mathfrak{S}$. Es sei

$$\frac{\mathfrak{K} \times \mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} \sim \widehat{\mathfrak{K}}' .$$

$\widehat{\mathfrak{K}}'$ *enthält nach Hilfssatz* 15 *nur untereinander kohärente Füße. Es sei* $\widehat{\mathfrak{K}}$ *die volle Kohärente von* $\widehat{\mathfrak{S}}$, *in der* $\widehat{\mathfrak{K}}'$ *enthalten ist.*

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \widehat{\mathfrak{K}} \times \widehat{\mathfrak{L}} ; \qquad \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{D}} \sim \widehat{\mathfrak{U}} .$$

Behauptung:

$$(\widehat{\mathfrak{U}}, \widehat{\mathfrak{S}}) = \widehat{\mathfrak{L}} .$$

Beweis: Es sei $\widehat{\mathfrak{F}}$ ein Fuß von $\widehat{\mathfrak{G}} \sim \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$. Es sei $\widehat{\mathfrak{F}} < \widehat{\mathfrak{K}}'$. Man setze $\widehat{\mathfrak{F}} \sim \frac{\overline{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{D}}$; dann ist

$$\mathfrak{D} < \overline{\mathfrak{F}} < \mathfrak{K} \times \mathfrak{D} ,$$

also nach DUDP Korollar 3 zu Satz 1

$$\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{D} \times (\overline{\mathfrak{F}}, \mathfrak{K}) .$$

Man setze $\mathfrak{F} = (\overline{\mathfrak{F}}, \mathfrak{K})$. Da $\widehat{\mathfrak{F}} <_i \widehat{\mathfrak{G}}$, so ist $\overline{\mathfrak{F}} <_i \mathfrak{G}$; da ferner $\mathfrak{K} <_i \mathfrak{G}$, so ist auch $\mathfrak{F} <_i \mathfrak{G}$. Die Voraussetzungen der Umkehrung zu Hilfssatz 5 sind also erfüllt; also ist $\mathfrak{F}$ Fuß von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{F} < \mathfrak{K}$, so ist $(\mathfrak{F}, \mathfrak{U}) = \mathfrak{E}$ nach Hilfssatz 3, weil $(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{L}$ und $(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}) < (\mathfrak{K}, \mathfrak{L}) = \mathfrak{E}$. Also ist $(\widehat{\mathfrak{F}}, \widehat{\mathfrak{U}}) = \widehat{\mathfrak{E}}$; mithin $(\widehat{\mathfrak{K}}', \widehat{\mathfrak{U}}) = \widehat{\mathfrak{E}}$. Wenn $\widehat{\mathfrak{F}} < \widehat{\mathfrak{K}}$, aber nicht enthalten in $\widehat{\mathfrak{K}}'$, so ist, wenn $\widehat{\mathfrak{F}} \sim \frac{\overline{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{D}}$, $\overline{\mathfrak{F}}$ nicht enthalten in $\mathfrak{U}$ nach dem Korollar zu Hilfssatz 16. Also ist $(\widehat{\mathfrak{F}}, \widehat{\mathfrak{U}}) = \widehat{\mathfrak{E}}$, mithin $(\widehat{\mathfrak{K}}, \widehat{\mathfrak{U}}) = \widehat{\mathfrak{E}}$. Also enthält $(\widehat{\mathfrak{S}}, \widehat{\mathfrak{U}})$ in $\widehat{\mathfrak{K}} \times \widehat{\mathfrak{L}}$ nur Komponenten aus $\widehat{\mathfrak{L}}$, folglich $(\widehat{\mathfrak{S}}, \widehat{\mathfrak{U}}) < \widehat{\mathfrak{L}}$. Wenn endlich $\widehat{\mathfrak{F}} < \widehat{\mathfrak{L}}$, $\widehat{\mathfrak{F}} \sim \frac{\overline{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{D}}$, so ist $\overline{\mathfrak{F}} < \mathfrak{U}$ nach dem Korollar 1 zu Hilfssatz 17, also auch $\widehat{\mathfrak{F}} < \widehat{\mathfrak{U}}$, mithin $\widehat{\mathfrak{L}} < \widehat{\mathfrak{U}}$, also $(\widehat{\mathfrak{S}}, \widehat{\mathfrak{U}}) = \widehat{\mathfrak{L}}$ oder $(\overline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{U}) = \overline{\mathfrak{L}}$, worin $\widehat{\mathfrak{L}} \sim \frac{\overline{\mathfrak{L}}}{\mathfrak{D}}$.

Hilfssatz 18: *Es mögen sämtliche Buchstaben die gleiche Bedeutung haben wie in den Hilfssätzen* 16 *und* 17. *Man setze*

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \widehat{\mathfrak{K}}_1 \times \widehat{\mathfrak{K}}_2 \times \cdots \cdots ;$$
$$\widehat{\mathfrak{K}} = \widehat{\mathfrak{K}}_1 ; \qquad \widehat{\mathfrak{K}}' < \widehat{\mathfrak{K}}_1 ;$$

$\widehat{\mathfrak{K}}_2$ *sei eine andere Kohärente.*

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \widehat{\mathfrak{K}}_2 \times \widehat{\mathfrak{L}}_2 ; \qquad \widehat{\mathfrak{L}}_2 \sim \frac{\overline{\mathfrak{L}}_2}{\mathfrak{D}} .$$

Behauptung:

$$\frac{\widehat{\mathfrak{B}}}{\widehat{\mathfrak{L}}_2} \sim \frac{\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}\right)}{\left(\frac{\overline{\mathfrak{L}}_2}{\mathfrak{D}}\right)} \sim \frac{\mathfrak{G}}{\overline{\mathfrak{L}}_2}$$

ist ein schwebender Faktor.

Beweis: Es ist

$$\widehat{\mathfrak{K}}' < \widehat{\mathfrak{K}}_1 < \widehat{\mathfrak{L}}_2 ,$$

also

$$\frac{\mathfrak{K} \times \mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} < \frac{\overline{\mathfrak{L}}_2}{\mathfrak{D}} ;$$

mithin

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{L} < \mathfrak{K} \times \mathfrak{D} < \overline{\mathfrak{L}}_2 .$$

Also ist $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}_2}$ ein schwebender Faktor, der nach Satz 4 in jeder subdirekten Zerlegung fortgelassen werden kann.

Hauptsatz 34: *Die erste und die zweite kanonische Zerlegung einer Gruppe sind mit einander identisch.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 \times \cdots \times \mathfrak{K}_t$$

die direkte Zerlegung von $\mathfrak{S}$ in Kohärenten, t die Anzahl der Kohärenten.

$$\mathfrak{L}_\tau = \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 \times \cdots \times \mathfrak{K}_{\tau-1} \times \mathfrak{K}_{\tau+1} \times \cdots \times \mathfrak{K}_t$$

seien die Komplementärkohärenten, mithin

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K}_\tau \times \mathfrak{L}_\tau \qquad \text{für} \quad \tau = 1, 2, 3, \ldots, t .$$

$\mathfrak{U}_\tau$ sei der Stativdurchschnitt über $\mathfrak{L}_\tau$. Die $\mathfrak{U}_\tau$ sind die erzeugenden invarianten Untergruppen der ersten kanonischen Zerlegung von $\mathfrak{G}$. Es ist zu zeigen, daß die erzeugenden der fertigen zweiten kanonischen Zerlegung ebenfalls die $\mathfrak{U}_\tau$ sind.

Es sei

$$\widehat{\mathfrak{B}}_\tau \overset{\tau}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}_\tau} .$$

$\widehat{\mathfrak{S}}_\tau$ sei der Sockel von $\widehat{\mathfrak{B}}_\tau$.

$$\widehat{\mathfrak{S}}_\tau \overset{\tau}{\sim} \frac{\overline{\mathfrak{S}}_\tau}{\mathfrak{L}_\tau} .$$

Man setze

$$\widehat{\mathfrak{K}}'_{\tau,1} \overset{\tau}{\sim} \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{L}_\tau} = \frac{\mathfrak{K}_\tau \times \mathfrak{L}_\tau}{\mathfrak{L}_\tau} .$$

Es ist dies der bodenständige Sockel der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}_\tau} \overset{\tau}{\sim} \widehat{\mathfrak{B}}_\tau$. Es ist $\widehat{\mathfrak{K}}'_{\tau,1} < \widehat{\mathfrak{S}}_\tau$, mithin $\mathfrak{S} < \overline{\mathfrak{S}}_\tau$. Es sei $\widehat{\mathfrak{K}}_{\tau,1}$ die volle Kohärente von $\widehat{\mathfrak{S}}_\tau$, für die $\widehat{\mathfrak{K}}'_{\tau,1} < \widehat{\mathfrak{K}}_{\tau,1}$.

$$\widehat{\mathfrak{S}}_\tau = \widehat{\mathfrak{K}}_{\tau,1} \times \widehat{\mathfrak{L}}_{\tau,1} .$$

Beim zweiten Schritt der fortgesetzten meromorphen Zerlegung in Kohärenten hat man die Faktorgruppe $\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\tau}{\widehat{\mathfrak{L}}_{\tau,1}}$ zu bilden. Es sei

$$\widehat{\mathfrak{L}}_{\tau,1} \overset{\tau}{\sim} \frac{\overline{\mathfrak{L}}_{\tau,1}}{\mathfrak{L}_\tau} .$$

Nach Korollar 2 zu Hilfssatz 17 ist

$$(\overline{\mathfrak{S}}_\tau , \mathfrak{U}_\tau) = \overline{\mathfrak{L}}_{\tau,1} ,$$

worin

$$\widehat{\mathfrak{S}}_\tau \mathrel{\widetilde{\tau}} \frac{\mathfrak{S}_\tau}{\mathfrak{Q}_\tau}$$

gesetzt sei. Die Faktorgruppen nach den anderen Komplementärkohärenten in $\widehat{\mathfrak{S}}_\tau$ ergeben nach Hilfssatz 18 schwebende subdirekte Faktoren, die weggelassen werden können. Die Zahl der subdirekten Faktoren bleibt also nach dem zweiten Schritt im ganzen gleich t. Der Beweis werde durch Induktion geführt. Es sei für irgendein λ $\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)}$ die erzeugende invariante Untergruppe, die aus $\mathfrak{Q}_\tau$ nach dem λ-ten Schritt der fortgesetzten meromorphen Zerlegung in Kohärenten entstanden sei. Es sei $\mathfrak{Q}_\tau^{(1)} = \mathfrak{Q}_\tau$. Es sei bereits bewiesen, daß

(1) $$(\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{Q}_\tau \ ;$$

(2) $$\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)} < \mathfrak{U}_\tau \ .$$

Es soll dasselbe für $\lambda + 1$ bewiesen werden. Da $\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)} < \mathfrak{U}_\tau$, so ist der Durchschnitt aller Stative über $\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)}$ ebenfalls gleich $\mathfrak{U}_\tau$. Es sei

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)}} \mathrel{\widetilde{\tau,\lambda}} \widehat{\mathfrak{B}}_\tau^{(\lambda)} .$$

Der Sockel von $\widehat{\mathfrak{B}}_\tau^{(\lambda)}$ sei

$$\widehat{\mathfrak{S}}_\tau^{(\lambda)} \mathrel{\widetilde{\tau,\lambda}} \frac{\mathfrak{S}_\tau^{(\lambda+1)}}{\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)}} .$$

$$\frac{\mathfrak{K}_\tau \times \mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)}}{\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)}} \mathrel{\widetilde{\tau,\lambda}} \widehat{\mathfrak{K}}_{\tau,1}^{(\lambda)'} < \widehat{\mathfrak{S}}_\tau^{(\lambda)} .$$

$\widehat{\mathfrak{K}}_\tau^{(\lambda)}$ sei die volle Kohärente von $\widehat{\mathfrak{S}}_\tau^{(\lambda)}$, so daß

$$\widehat{\mathfrak{K}}_{\tau,1}^{(\lambda)'} < \widehat{\mathfrak{K}}_{\tau,1}^{(\lambda)} ,$$

$$\widehat{\mathfrak{S}}_\tau^{(\lambda)} = \widehat{\mathfrak{K}}_{\tau,1}^{(\lambda)} \times \widehat{\mathfrak{Q}}_{\tau,1}^{(\lambda)} ,$$

$$\widehat{\mathfrak{Q}}_{\tau,1}^{(\lambda)} \mathrel{\widetilde{\tau,1}} \frac{\mathfrak{Q}_{\tau,1}^{(\lambda+1)}}{\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)}} .$$

$\mathfrak{Q}_{\tau,1}^{(\lambda+1)} = \mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda+1)}$ ist die einzige nach dem Verfahren beizubehaltende erzeugende invariante Untergruppe des nächsten Schrittes, da nach Hilfssatz 18 die übrigen Komplementärkohärenten in $\mathfrak{S}_\tau^{(\lambda)}$ nur schwebende Faktoren liefern. Es ist nach Korollar 2 zu Hilfssatz 17

$$(\mathfrak{S}_\tau^{(\lambda+1)}, \mathfrak{U}_\tau) = \mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda+1)} ,$$

also $\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda+1)} < \mathfrak{U}_\tau$. Ferner ist

$$(\widehat{\mathfrak{Q}}_{\tau,1}^{(\lambda)} , \widehat{\mathfrak{K}}_{\tau,1}^{(\lambda)'}) = \widehat{\mathfrak{E}}_{\tau,1}^{(\lambda)} .$$

also

$$(\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda+1)}, \mathfrak{K}_\tau \times \mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)}) = \mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)} .$$

Da

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K}_\tau \times \mathfrak{Q}_\tau < \mathfrak{K}_\tau \times \mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)} ,$$

so ist

$$(\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda+1)}, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda+1)}, \mathfrak{K}_\tau \times \mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)}, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{Q}_\tau^{(\lambda)}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{Q}_\tau .$$

Also sind die Behauptungen (1) und (2) für den Index $\lambda + 1$ bewiesen. Da die Voraussetzungen für $\lambda = 1$ erfüllt sind, gelten sie für die folgenden λ. Das Verfahren ist fortsetzbar, so lange zu $\mathfrak{K}_{\tau,1}^{(\lambda)}$ noch eine von der Einheit verschiedene Komplementärkohärente existiert. Da $\mathfrak{G}$ nur endlich viele Untergruppen enthält, muß das Verfahren abbrechen; d. h. es muß für ein l, das noch von τ abhängt, der Fall eintreten, daß

$$\widehat{\mathfrak{S}}_{\tau}^{(l)} = \widehat{\mathfrak{K}}_{\tau,1}^{(l)} , \qquad \widehat{\mathfrak{L}}_{\tau,1}^{(l)} = \widehat{\mathfrak{E}}_{\tau}^{(l)} .$$

Wenn

$$\frac{\mathfrak{U}_{\tau}}{\mathfrak{L}_{\tau}^{(l)}} \sim \widehat{\mathfrak{U}}_{\tau}^{(l)} ,$$

so ist

$$(\widehat{\mathfrak{S}}_{\tau}^{(l)}, \widehat{\mathfrak{U}}_{\tau}^{(l)}) = \widehat{\mathfrak{L}}_{\tau,1}^{(l)} = \widehat{\mathfrak{E}}_{\tau}^{(l)} .$$

Eine invariante Untergruppe von $\widehat{\mathfrak{B}}_{\tau}^{(l)}$, die zum Sockel $\widehat{\mathfrak{S}}_{\tau}^{(l)}$ von $\mathfrak{B}_{\tau}^{(l)}$ teilerfremd ist, ist aber gleich der Einheit $\mathfrak{E}_{\tau}^{(l)}$. Mithin

$$\widehat{\mathfrak{U}}_{\tau}^{(l)} = \widehat{\mathfrak{E}}_{\tau}^{(l)} ;$$
$$\mathfrak{U}_{\tau} = \mathfrak{L}_{\tau}^{(l)} .$$

Damit ist der Hauptsatz 34 bewiesen.

Die Faktorgruppe $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}_{\tau}^{(l)}} \sim \widehat{\mathfrak{B}}_{\tau}^{(l)}$ besitzt nur noch eine einzige Kohärente

$$\widehat{\mathfrak{S}}_{\tau}^{(l)} = \widehat{\mathfrak{K}}_{\tau,1}^{(l)} .$$

Korollar 1 zu Satz 34: *Für kommutative und hyperkommutative* [5]) *Gruppen ist die kanonische Zerlegung die direkte Zerlegung in Faktoren von verschiedenen Primzahlpotenzordnungen. Eine Erweiterung der ursprünglichen Kohärenten des Sockels tritt hier nicht ein.*

Ein Fuß III. Art ist gleichzeitig Kohärente, sein Komplementärfuß gleichzeitig Komplementärkohärente; das Maximalstativ über dem Komplementärfuß ist nach Satz 33 ein einziges Stativ, also gleichzeitig Stativdurchschnitt über der Komplementärkohärente, mithin erzeugende invariante Untergruppe des kanonischen Faktors. Man erhält also

Korollar 2 zu Satz 34: *Die kanonischen Faktoren III. Art stimmen mit den einfüßigen Faktoren III. Art überein.*

Sind alle Füße einer Gruppe von III. Art, so stimmt die kanonische Zerlegung mit der nach DUDP Korollar 2 zu Satz 17 identisch eindeutig feststehenden ökonomischen Zerlegung in unzerlegbare Faktoren überein.

[5]) Siehe DUDP § 5.

Eingegangen 3. August 1928.

Numerische Auswertung von Stieltjesintegralen.

Von *Johannes Hellerich* in Hamburg und *Robert Schmidt* in Kiel.

Wenn es sich darum handelt, ein bestimmtes Integral

$$(1) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

numerisch auszuwerten, so ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten, falls eine Funktion $\Phi(x)$ mit der Eigenschaft $\Phi'(x) = \varphi(x)$ vorhanden, und $\Phi(x)$ eine elementare Funktion ist, d. h. die Berechnung von Werten der Funktion $\Phi(x)$ nicht wieder auf die Auswertung bestimmter Integrale hinausläuft. Alle bekannten Integrationsmethoden gehen — mangels der Existenz einer solchen Funktion $\Phi(x)$ — davon aus, den Integranden $\varphi(x)$ in irgendeinem Sinne möglichst gut durch eine Funktion zu approximieren, zu der sich eine geeignete Funktion $\Phi(x)$ angeben läßt. In $\Phi(b) - \Phi(a)$ liegt dann ein Näherungswert für das bestimmte Integral vor.

Die Ausbeutung dieses Ansatzes zu praktischen Zwecken hat für Integrale der Form (1) eine gewisse Abgeschlossenheit erreicht. Anders liegt die Sache jedoch bei Stieljesintegralen, also bei Integralen der allgemeineren Gestalt

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dG(x).$$

In der Regel wird zwar $G(x)$ eine stetige Ableitung besitzen, $G'(x) = g(x)$, so daß die Integrale (2) die Gestalt

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

annehmen und sich als Integrale (1) behandeln lassen. Hier ist jedoch zu konstatieren: Bei vielen Aufgaben der Praxis, insbesondere in der Physik und Astronomie, stellen sich die auszuwertenden Integrale primär als Stieltjesintegrale ein, z. B. stets dann, wenn über Flächen, die ungleichmäßig mit Masse, Elektrizität, Druck oder Helligkeit belegt sind, zu integrieren ist. In solchen Fällen erscheint es von vornherein angemessen, nicht den Übergang zu den Integralen der Form (1) zu vollziehen, sondern die Funktion $f(x)$ allein in geeigneter Weise zu approximieren, etwa durch Polynome. Als Näherungswerte für das Integral $\int_a^b f(x)\,dG(x)$ erhält man dann Linearverbindungen von Momenten

$$(3) \qquad \mu_k = \int_a^b x^k\,dG(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

der Belegungsfunktion $G(x)$, und die Momente werden sich in vielen Fällen geschlossen auswerten lassen. Dieser Weg ist gelegentlich mit Erfolg beschritten worden.

Bei unseren Vorbereitungen zur Herstellung von Hilfstafeln, die in der Theorie der Bedeckungsveränderlichen Verwendung finden sollen, zeigte es sich, daß die vorhandenen Integrationsmethoden nicht geeignet sind, die dort erforderliche Rechenarbeit

auf einen angemessenen Umfang zu reduzieren. Die Beseitigung dieser Schwierigkeiten gelang uns zunächst durch Anwendung von Methoden ad hoc, und zwar stützen sich die Methoden sämtlich auf die Tatsache, daß die Funktionen $f(x)$ der Stieltjesintegrale, die bei dem erwähnten Problem auftreten, sich in geschlossener Form integrieren lassen. — Dieser Umstand ist nicht als zufällig anzusehen; gerade bei den Aufgaben der Physik und Astronomie, auf die oben hingewiesen wurde, liegt es häufig in der Natur der Sache, und es erscheint lohnend zu untersuchen, wie man in der Praxis ein Integral der Form (2) vorteilhaft auswerten kann, wenn nicht bloß die Momente (3), sondern auch

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

in jedem in Betracht kommenden Intervall (a, b) als bekannt angesehen werden dürfen. Wir gehen so vor, daß wir $f(x)$ durch einfache Funktionen — zunächst durch Polynome — approximieren, dabei aber nicht die gewöhnliche Interpolation in den Vordergrund stellen, sondern *in erster Linie die Integralgleichheit zwischen $f(x)$ und den approximierenden Funktionen fordern.* In bezug auf weitere an die approximierenden Funktionen zu stellende Anforderungen bleibt einige Bewegungsfreiheit; wir beschränken uns darauf, nur solche Anforderungen und daraus resultierende Integrationsverfahren anzugeben, deren praktische Brauchbarkeit wir erprobt haben. Die sich aufdrängenden theoretischen Fragen behandeln wir nur so weit, wie es in einer Untersuchung mit rein praktischen Zielen unerläßlich erscheint.

Wir bemerken noch, daß manche Integrale, die nicht den Voraussetzungen genügen, von denen wir ausgehen, sich durch passende Gruppierung des Integranden auf eine geeignete Form bringen lassen, z. B.

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x^2}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

und

$$\int \frac{dx}{\lg x} = \int \frac{1}{x \lg x}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

§ 1.

Um zu einem Näherungswert für das Integral

$$\int_a^b f(x)\, d\,G(x)$$

zu gelangen, approximieren wir $f(x)$ zunächst durch eine ganze lineare Funktion

$$P(x) = \sigma + \tau x,$$

indem wir erstens die Integralgleichheit zwischen $f(x)$ und $P(x)$ im Intervall (a, b), zweitens die Parallelität der Geraden $y = P(x)$ mit der Sehne der Kurve $y = f(x)$ in den Punkten a und b fordern, also

1. $$\int_a^b P(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

2. $$P(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + \text{konst}.$$

Das ergibt

$$(b - a) \cdot \sigma + \frac{b^2 - a^2}{2}\,\tau = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

und daraus, wenn allgemein

$$\mu_k = \int_a^b x^k \, dG(x) \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

gesetzt wird, die *Näherungsformel*

$$\left\| N(a,b) = \int_a^b P(x)\, dG(x) = \frac{1}{b-a}\left[\left\{-\frac{b+a}{2}\,\mu_0 + \mu_1\right\}\{f(b) - f(a)\} + \mu_0 \cdot \int_a^b f(x)\, dx\right].\right.$$

Bezeichnet man den Näherungswert $N(a, b)$ ausführlicher mit $N(f(x), G(x); a, b)$, so ist, wenn $c_1, \dots, c_n$ Konstanten bedeuten,

$$\begin{aligned} &N(c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x),\ G(x); a, b) = c_1 N(f_1(x), G(x); a, b) + \cdots \\ &\qquad + c_n N(f_n(x),\ G(x);\ a, b), \\ &N(f(x),\ c_1 G_1(x) + \cdots + c_n G_n(x); a, b) = c_1 N(f(x), G_1(x); a, b) + \cdots \\ &\qquad + c_n N(f(x),\ G_n(x);\ a, b); \end{aligned} \tag{4}$$

ganze lineare Transformation der Integrationsveränderlichen liefert

$$N\Big(f(\alpha x + \beta),\ G(\alpha x + \beta);\ \frac{1}{\alpha}(a - \beta),\ \frac{1}{\alpha}(b - \beta)\Big) = N(f(x), G(x); a, b). \tag{5}$$

Der Näherungswert verhält sich also in diesen Beziehungen ebenso wie der Integralwert selbst.

Im Hinblick auf das im § 4 zu entwickelnde Verfahren bemerken wir: Der Näherungswert hat die Form

$$N(a,b) = \mathsf{A} \cdot \{f(b) - f(a)\} + \mathsf{B} \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx, \tag{6}$$

wo A und B von $f(x)$ unabhängig sind. Ferner ist $N(a, b) = \int_a^b f(x)\, dG(x)$ erfüllt für jede ganze lineare Funktion $f(x)$, insbesondere hat man für $f(x) \equiv 1$ und $f(x) \equiv x$:

$$\mathsf{B} = \mu_0,$$

$$(b-a) \cdot \mathsf{A} + \frac{b+a}{2} \cdot \mathsf{B} = \mu_1.$$

Die Näherungsformel kann man also auch durch die Forderung gewinnen, daß $N(a, b)$ die Form (6) haben und stets dann, wenn $f(x)$ eine ganze lineare Funktion ist, den wahren Integralwert liefern soll.

Bei der praktischen Durchführung des Verfahrens wird man in der Regel das Intervall (a, b) unterteilen, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = b$, und die Näherungsformel auf die Teilintervalle $(x_\nu, x_{\nu+1})$ einzeln anwenden. Da die Unterteilung willkürlich ist, so hat man es in der Hand, den Besonderheiten der Funktionen $f(x)$ und $G(x)$ Rechnung zu tragen, also den Fehler der Näherung durch geeignete Wahl der Teilpunkte klein zu halten. Immerhin wird man — schon zur Erhöhung der Rechensicherheit — nach Möglichkeit die Teilpunkte äquidistant wählen; insbesondere wird man das dann tun, wenn $f(x)$ und $G(x)$ sich gut durch Polynome approximieren lassen.

Fehlerabschätzungen geben wir im § 2, ein Beispiel im § 3.

§ 2.

Zur Gewinnung von Fehlerabschätzungen oder Korrekturen für das Verfahren des § 1 nehmen wir an, das Intervall (a, b) sei äquidistant geteilt:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = b, \qquad x_{\nu+1} - x_\nu = h \qquad (\nu = 0, 1, \dots, l-1).$$

Wir verwenden die Bezeichnungen

$$f(x_\nu) = f_\nu\,,$$

$$\Delta y_\nu = y_{\nu+1} - y_\nu, \qquad \bar{\Delta} y_\nu = y_\nu - y_{\nu-1},$$

$$f_\nu^{(0)} = \frac{f_{\nu+1} + f_\nu}{2}, \quad f_\nu^{(1)} = \Delta f_\nu, \quad f_\nu^{(2)} = \frac{\Delta\bar{\Delta} f_{\nu+1} + \Delta\bar{\Delta} f_\nu}{2}, \quad f_\nu^{(3)} = \Delta^2\bar{\Delta} f_\nu, \ldots,$$

die entsprechenden Bezeichnungen für

$$g(x) = G'(x),$$

und setzen

$$v = \frac{x - \dfrac{x_{\nu+1} + x_\nu}{2}}{h} \qquad (x_\nu \leqq x \leqq x_{\nu+1}),$$

also

$$x = \frac{x_{\nu+1} + x_\nu}{2} + h \cdot v \qquad \left(-\frac{1}{2} \leqq v \leqq +\frac{1}{2}\right).$$

Für $f(x)$ benutzen wir im Intervall $(x_\nu, x_{\nu+1})$ die Interpolationsformel

$$f(x) = f_\nu^{(0)} + \frac{v}{1!} f_\nu^{(1)} + \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{2!} f_\nu^{(2)} + \frac{v\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)}{3!} f_\nu^{(3)} + \frac{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)\left(v^2 - \frac{9}{4}\right)}{4!} f_\nu^{(4)} + \frac{v\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)\left(v^2 - \frac{9}{4}\right)}{5!} f_\nu^{(5)} + \cdots$$

$$= P_0(v) \cdot f_\nu^{(0)} + \frac{P_1(v)}{1!} f_\nu^{(1)} + \frac{P_2(v)}{2!} f_\nu^{(2)} + \cdots,$$

und die gleiche Interpolationsformel für $g(x)$:

$$g(x) = P_0(v) \cdot g_\nu^{(0)} + \frac{P_1(v)}{1!} g_\nu^{(1)} + \frac{P_2(v)}{2!} g_\nu^{(2)} + \cdots.$$

Es ist dann im Intervall $(x_\nu, x_{\nu+1})$:

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{f_\nu^{(p)}\, g_\nu^{(q)}}{p!\, q!} P_p(v)\, P_q(v)\,,$$

$$W(x_\nu, x_{\nu+1}) = \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(x)\, dG(x) = \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(x)\, g(x)\, dx = \Delta x_\nu \cdot \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{f_\nu^{(p)}\, g_\nu^{(q)}}{p!\, q!} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_p(v)\, P_q(v)\, dv.$$

Auf Grund von (4) und (5) erhält man

$$N(x_\nu, x_{\nu+1}) = \Delta x_\nu \cdot \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{f_\nu^{(p)}\, g_\nu^{(q)}}{p!\, q!} N\left(P_p(v), P_q(v); -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right).$$

Die Gesamtkorrektur $K(x_\nu, x_{\nu+1})$, die an $N(x_\nu, x_{\nu+1})$ anzubringen ist, also

$$K(x_\nu, x_{\nu+1}) = W(x_\nu, x_{\nu+1}) - N(x_\nu, x_{\nu+1})$$

wird demnach

$$K(x_\nu, x_{\nu+1}) = \Delta x_\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{p,q=0 \\ p+q=m}}^{\infty} \frac{f_\nu^{(p)}\, g_\nu^{(q)}}{p!\, q!} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_p(v)\; P_q(v)\; dv - N\left(P_p(v), P_q(v); -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Auf die Näherungswerte in den geschweiften Klammern kann man (4) erneut anwenden — das führt auf

$$N\left(P_p(v), P_q(v); -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \sum_{\varkappa=0}^{p} \sum_{\lambda=0}^{q} c_{\varkappa\lambda}^{(p\,q)}\, N\left(v^\varkappa, v^\lambda; -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$$

– und mit den Integralen in diesen Klammern analog verfahren:

$$K(x_\nu, x_{\nu+1}) = \Delta x_\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{p,q=0 \\ p+q=m}}^{\infty} \frac{f_\nu^{(p)}\, g_\nu^{(q)}}{p!\, q!} \sum_{\varkappa=0}^{p} \sum_{\lambda=0}^{q} c_{\varkappa\lambda}^{(pq)} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} v^{\varkappa+\lambda}\, dv - N\left(v^\varkappa, v^\lambda; -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Diese Darstellung der Gesamtkorrektur gilt für jedes Näherungsverfahren, für das die Beziehungen (4) und (5) erfüllt sind. Um die Gesamtkorrektur für das vorliegende Verfahren darzustellen, sind nur noch die Werte von

$$k_{\varkappa\lambda} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} v^{\varkappa+\lambda}\, dv - N\left(v^\varkappa, v^\lambda; -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$$

zu ermitteln. Es ist

$$k_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{für } \varkappa + \lambda \equiv 1 \bmod 2, \\ + \dfrac{\varkappa\lambda}{(\varkappa+1)(\lambda+1)(\varkappa+\lambda+1)} \cdot \dfrac{1}{2^{\varkappa+\lambda}} & \text{für } \varkappa \equiv 0,\ \lambda \equiv 0 \bmod 2, \\ - \dfrac{\varkappa-1}{(\lambda+2)(\varkappa+\lambda+1)} \cdot \dfrac{1}{2^{\varkappa+\lambda}} & \text{für } \varkappa \equiv 1,\ \lambda \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$$

Hieraus und aus der Gestalt der Koeffizienten $c_{\varkappa\lambda}^{(pq)}$ ist zu erkennen, daß die ungeraden Werte von m, ferner die Werte $m = 0$ und $m = 2$ keine Beiträge zur Gesamtkorrektur liefern; demgemäß können wir, wenn

$$K_n(x_\nu, x_{\nu+1}) = \Delta x_\nu \cdot \sum_{\substack{p,q=0 \\ p+q=2n+2}}^{\infty} \frac{f_\nu^{(p)}\, g_\nu^{(q)}}{p!\, q!} \sum_{\varkappa=0}^{p} \sum_{\lambda=0}^{q} c_{\varkappa\lambda}^{(pq)} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} v^{\varkappa+\lambda}\, dv - N\left(v^\varkappa, v^\lambda; -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \right\}$$

gesetzt wird, schreiben:

$$K(x_\nu, x_{\nu+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x_\nu, x_{\nu+1}).$$

In der Regel wird man sich mit der Kenntnis von K_1 begnügen; wir geben außerdem noch K_2 an:

$$\left\| \begin{aligned} K_1(x_\nu, x_{\nu+1}) &= \frac{\Delta x_\nu}{720} \cdot (f_\nu^{(2)}\, g_\nu^{(2)} - f_\nu^{(3)}\, g_\nu^{(1)}), \\ K_2(x_\nu, x_{\nu+1}) &= \frac{\Delta x_\nu}{60\,480} \cdot (-16 f_\nu^{(2)}\, g_\nu^{(4)} + 2 f_\nu^{(3)}\, g_\nu^{(3)} - 16 f_\nu^{(4)}\, g_\nu^{(2)} + 9 f_\nu^{(5)}\, g_\nu^{(1)}). \end{aligned} \right.$$

Würde man die Integration in der üblichen Weise durch Interpolation des Integranden $f(x) \cdot g(x)$ ausführen und dabei die 4. Differenzen von $f(x) \cdot g(x)$ nicht mehr berücksichtigen, so würde der Einfluß der Differenzen 4. Ordnung $f_\nu^{(0)} g_\nu^{(4)}, \ldots, f_\nu^{(4)} g_\nu^{(0)}$ die Korrektur

$$\frac{\Delta x_\nu}{720} \cdot (11 f_\nu^{(0)}\, g_\nu^{(4)} + 44 f_\nu^{(1)}\, g_\nu^{(3)} + 66 f_\nu^{(2)}\, g_\nu^{(2)} + 44 f_\nu^{(3)}\, g_\nu^{(1)} + 11 f_\nu^{(4)}\, g_\nu^{(0)})$$

erforderlich machen.

§ 3.

Als Beispiel zum Verfahren des § 1 behandeln wir

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \qquad (b > a > 0).$$

Wir setzen $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $G(x) = \dfrac{1}{2} x^2$, also $g(x) = x$, und erhalten

$$N(a,b) = \frac{1}{b-a}\cdot\left[\left\{-\frac{b+a}{2}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{b^3-a^3}{3}\right\}\left\{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right\}-\frac{b^2-a^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right]$$
$$= (b-a)\left[\frac{b-a}{12}\cdot\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\right].$$

Teilt man das Intervall (a, b) äquidistant, so ergibt sich mit den Bezeichnungen des § 2:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \sim h\cdot\left[\frac{h}{12}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)+\sum_{\nu=0}^{l}\frac{1}{x_\nu}\right].$$

Als Korrekturen

$$K_1 = \sum_{\nu=0}^{l-1} K_1(x_\nu, x_{\nu+1}) \quad \text{und} \quad K_2 = \sum_{\nu=0}^{l-1} K_2(x_\nu, x_{\nu+1})$$

erhält man

$$K_1 = -\frac{h}{720}\sum_{\nu=0}^{l-1} f_\nu^{(3)}\, g_\nu^{(1)} = -\frac{h^2}{720}\sum_{\nu=0}^{l-1} f_\nu^{(3)} = -\frac{h^2}{720}\left(\Delta\bar{\Delta}\frac{1}{x_l^2}-\Delta\bar{\Delta}\frac{1}{x_0^2}\right),$$

$$K_2 = \frac{9h}{60\,840}\sum_{\nu=0}^{l-1} f_\nu^{(5)}\, g_\nu^{(1)} = \frac{h^2}{6\,760}\sum_{\nu=0}^{l-1} f_\nu^{(5)} = \frac{h^2}{6\,760}\left(\Delta^2\bar{\Delta}^2\frac{1}{x_l^2}-\Delta^2\bar{\Delta}^2\frac{1}{x_0^2}\right).$$

Wir wählen schließlich $a = 1$, $b = 2$, $l = 10$, und führen die numerische Rechnung vollständig durch. Es wird

$$\lg 2 \sim -\frac{121}{1600}+\sum_{\nu=10}^{20}\frac{1}{\nu}$$

mit den Korrekturen

$$K_1 = -\frac{1}{72\,000}\left(\Delta\bar{\Delta}\frac{1}{x_{10}^2}-\Delta\bar{\Delta}\frac{1}{x_0^2}\right), \qquad K_2 = +\frac{1}{676\,000}\left(\Delta^2\bar{\Delta}^2\frac{1}{x_{10}^2}-\Delta^2\bar{\Delta}^2\frac{1}{x_0^2}\right).$$

Die in Betracht kommenden Differenzen $\Delta\bar{\Delta}$ und $\Delta^2\bar{\Delta}^2$ sind aus dem folgenden Rechenschema zu entnehmen:

x_ν	x_ν^2	$\frac{1}{x_\nu^2}$			
0.8	0.64	1.56250 000			
			− 0.32793 210		
0.9	0.81	1.23456 790		+ 0.09336 420	
			− 0.23456 790		− 0.03235 002
1.0	1.00	1.00000 000		+ 0.06101 418	
			− 0.17355 372		− 0.01946 230
1.1	1.21	0.82644 628		+ 0.04155 188	
			− 0.13200 184		
1.2	1.44	0.69444 444			
1.8	3.24	0.30864 198			
			− 0.03163 367		
1.9	3.61	0.27700 831		+ 0.00462 536	
			− 0.02700 831		− 0.00085 968
2.0	4.00	0.25000 000		+ 0.00376 568	
			− 0.02324 263		− 0.00066 885
2.1	4.41	0.22675 737		+ 0.00309 683	
			− 0.02014 580		
2.2	4.84	0.20661 157			

Ferner ist zu rechnen

ν	$\frac{1}{\nu}$
10	0.10000 00000 00
11	09090 90909 09
12	8333 33333 33
13	7692 30769 23
14	7142 85714 29
15	6666 66666 67
16	6250 00000 00
17	5882 35294 12
18	5555 55555 56
19	5263 15789 47
20	5000 00000 00
	0.76877 14031 76

	0.76877 14031 8
	− 0.07562 50000 0
$N_0 =$	0.69314 64031 8
K_1: +	7951 2
$N_1 =$	0.69314 71983 0
K_2: −	187 8
$N_2 =$	0.69314 71795

Die ersten zehn Dezimalen von lg 2 lauten richtig 0.69314 71806. Der Näherungswert N_0, den das Verfahren direkt liefert, ist also mit einem Fehler von etwa acht Einheiten der 7. Dezimale behaftet. Der Fehler der Näherung N_1, die durch Berücksichtigung der ersten Korrektur K_1 entsteht, beträgt noch zwei Einheiten der 8. Dezimale, und erniedrigt sich bei N_2 auf eine Einheit der 9. Dezimale.

§ 4.

Bei dem Verfahren des § 1 wird die Approximation der Funktion $f(x)$ dadurch geliefert, daß zwei Parameter, σ und τ, in geeigneter Weise fixiert werden, während an gegebenen Daten die drei Größen $f(a)$, $f(b)$ und $\int_a^b f(x)dx$ zur Verfügung stehen. Wir nutzen jetzt diese drei Daten voll aus, indem wir drei Parameter einführen. Zur Approximation von $f(x)$ setzen wir ein Polynom 2. Grades

$$P(x) = \varrho + \sigma x + \tau x^2$$

an und verlangen

$$1. \quad \int_a^b P(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$
$$2. \quad P(a) = f(a),$$
$$3. \quad P(b) = f(b).$$

Diese Forderungen liefern für ϱ, σ, τ die drei linearen Gleichungen

$$\varrho + \frac{1}{2}(b+a)\sigma + \frac{1}{3}(b^2+ba+a^2)\tau = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$
$$\varrho + \quad a\cdot\sigma + \quad a^2\cdot\tau = f(a),$$
$$\varrho + \quad b\cdot\sigma + \quad b^2\cdot\tau = f(b),$$

deren Determinante stets von Null verschieden ist, so daß sich ϱ, σ und τ als Linearverbindungen von $f(a)$, $f(b)$ und $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ darstellen lassen. Denkt man sich mit solchen Werten von ϱ, σ und τ den Näherungswert

$$N(a,b) = \int_a^b P(x)\,dG(x)$$

gebildet, so wird dieser ebenfalls als Linearverbindung der beiden Werte von $f(x)$ und des Integralmittelwertes dieser Funktion erscheinen,

$$N(a,b) = \mathsf{A}\cdot f(a) + \mathsf{B}\cdot f(b) + \Gamma\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{7}$$

wo also A, B und Γ von $f(x)$ unabhängig sind. Die Koeffizienten A, B und Γ bestimmt man jedoch am besten direkt auf Grund dessen, daß $N(a,b)$ mit dem wahren Wert des Integrals übereinstimmt, wenn $f(x)$ ein beliebiges Polynom von höchstens 2. Grade ist. Die Eindeutigkeit der Darstellung (7) und damit die Berechtigung, so vorzugehen, ergibt sich zugleich.

Es ist nun bequem und *für die praktische Handhabung des Verfahrens von erheblichem Wert*, den Ansatz (7) durch den offenbar äquivalenten

$$N(a,b) = \alpha\cdot\{f(b)+f(a)\} + \beta\cdot\{f(b)-f(a)\} + \gamma\cdot\left\{\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - (f(b)+f(a))\right\}$$

zu ersetzen. In der Tat kommt man dann im allgemeinen mit einer viel geringeren Rechengenauigkeit aus.

Man erhält zur Bestimmung von α, β und γ, indem man nacheinander $f(x)=1$, $f(x)=x$, $f(x)=x^2$ wählt, die Gleichungen

$$\int_a^b dG(x) = \mu_0 = 2\alpha$$

$$\int_a^b x\,dG(x) = \mu_1 = (b+a)\alpha + (b-a)\beta$$

$$\int_a^b x^2\,dG(x) = \mu_2 = (b^2+a^2)\alpha + (b^2-a^2)\beta - \frac{1}{3}(b-a)^2\gamma.$$

Daraus

$$\alpha = \frac{1}{2}\mu_0,$$

$$\beta = \frac{1}{b-a}\left\{-\frac{b+a}{2}\mu_0 + \mu_1\right\},$$

$$\gamma = \frac{3}{(b-a)^2}\{-ba\mu_0 + (b+a)\mu_1 - \mu_2\}.$$

Die Gültigkeit der Relationen (4) und (5) auch für dieses Verfahren liegt auf der Hand. Infolgedessen hat man zur Bestimmung der Korrekturen — wir benutzen die gleichen Bezeichnungen wie im § 2 — nur noch

$$k_{\varkappa\lambda} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} v^{\varkappa+\lambda}\,dv - N\left(v^\varkappa, v^\lambda; -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right).$$

für diesen Fall auszuwerten. Es wird

$$k_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{für } \varkappa+\lambda \equiv 1 \bmod 2, \\ -\dfrac{\varkappa(\varkappa-2)\lambda}{(\varkappa+1)(\lambda+1)(\lambda+3)(\varkappa+\lambda+1)}\cdot\dfrac{1}{2^{\varkappa+\lambda}} & \text{für } \varkappa\equiv 0,\ \lambda\equiv 0 \bmod 2, \\ -\dfrac{\varkappa-1}{(\lambda+2)(\varkappa+\lambda+1)}\cdot\dfrac{1}{2^{\varkappa+\lambda}} & \text{für } \varkappa\equiv 1,\ \lambda\equiv 1 \bmod 2, \end{cases}$$

und als Korrekturen $K_1(x_\nu, x_{\nu+1})$ und $K_2(x_\nu, x_{\nu+1})$ erhält man

$$K_1(x_\nu, x_{\nu+1}) = -\frac{\Delta x_\nu}{720} f_\nu^{(3)} g_\nu^{(1)},$$

$$K_2(x_\nu, x_{\nu+1}) = \frac{\Delta x_\nu}{60\,480} \{2 f_\nu^{(3)} g_\nu^{(3)} - 3 f_\nu^{(4)} g_\nu^{(2)} + 10 f_\nu^{(5)} g_\nu^{(1)}\}.$$

Zur Beurteilung der bei Anwendung des Verfahrens erforderlichen Rechengenauigkeit ist es nützlich, Schranken für α, β und γ zu kennen. Solche Schranken ergeben sich aus der Darstellung

$$\alpha = \frac{1}{2} \int_a^b dG(x),$$

$$\beta = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right) dG(x),$$

$$\gamma = -\frac{3}{(b-a)^2} \int_a^b (x-a)(x-b)\, dG(x),$$

und zwar, wenn M eine Schranke für $|g(x)|$ im Intervall (a, b) bedeutet,

$$|\alpha| \leqq \frac{1}{2}(b-a)M,$$

$$|\beta| \leqq \frac{1}{4}(b-a)M,$$

$$|\gamma| \leqq \frac{1}{2}(b-a)M.$$

Wenn insbesondere $G(x)$ monoton ist, so hat man

$$|\alpha| \leqq \frac{1}{2}|G(b) - G(a)|,$$

$$|\beta| \leqq \frac{1}{2}|G(b) - G(a)|,$$

$$|\gamma| \leqq \frac{3}{4}|G(b) - G(a)|.$$

Man verifiziert durch Nachrechnen oder durch eine kurze Schwerpunktsbetrachtung, daß dieses Verfahren sich auf das im § 1 gegebene reduziert, wenn $g(x)$ eine ganze lineare Funktion ist; das Beispiel des § 2 kann also zugleich als Beispiel zu diesem Paragraphen dienen. Um ein weiteres zu bringen, wählen wir zur Berechnung von $\int_a^b \frac{dx}{x}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

und erhalten

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \sim \{\sqrt{b} - \sqrt{a}\}\left\{\frac{1}{b}\sqrt{b} + \frac{1}{a}\sqrt{a}\right\}$$
$$- \frac{1}{3(b-a)}\{b + 3a)\sqrt{b} - (3b + a)\sqrt{a}\} \cdot \left\{\frac{1}{b}\sqrt{b} - \frac{1}{a}\sqrt{a}\right\}$$
$$+ \frac{4}{5(b-a)^2}\{b(b-5a)\sqrt{b} - a(5b-a)\sqrt{a}\} \cdot \left\{\frac{4}{b-a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) - \left(\frac{1}{b}\sqrt{b} + \frac{1}{a}\sqrt{a}\right)\right\}.$$

Angewendet auf das Intervall (1, 2) bei Zehnteilung:

$$\begin{aligned} N_0 &= \quad 0.69314\ 72108\ 88 \\ K_1: &- \qquad\qquad 307\ 07 \\ N_1 &= \quad 0.69314\ 71801\ 81 \\ K_2: &+ \qquad\qquad 3\ 94 \\ N_2 &= \quad 0.69314\ 71805\ 75, \end{aligned}$$

während auf 12 Dezimalen

$$\lg 2 = \quad 0.69314\ 71805\ 60$$

ist.

§ 5.

Es ist gelegentlich, wenn auch nicht eben oft, zweckmäßig, in der durch den § 4 gegebenen Richtung noch einen Schritt weiterzugehen, nämlich das Intervall (a, b) einmal, etwa in der Mitte zu unterteilen, und nun mit $\xi = \frac{b+a}{2}$ den Ansatz

$$\int_a^b f(x)\, dG(x)$$

$$\sim \mathsf{A}_0 \cdot f(a) + \mathsf{A}_1 \cdot f(\xi) + \mathsf{A}_2 \cdot f(b) + \Gamma_1 \cdot \frac{2}{b-a}\int_a^{\xi} f(x)\, dx + \Gamma_2 \cdot \frac{2}{b-a}\int_{\xi}^{b} f(x)\, dx$$

zu machen, oder aus rechentechnischen Gründen besser

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dG(x) \sim\ & \alpha_1 \cdot \{-f(b) + 8 f(\xi) + 5 f(a)\} + \alpha_2 \cdot \{5 f(b) + 8 f(\xi) - f(a)\} \\ & + \beta \cdot \{f(b) - 2f(\xi) + f(a)\} \\ & + \gamma_1 \cdot \left\{\frac{24}{b-a}\int_a^{\xi} f(x)\, dx - (-f(b) + 8 f(\xi) + 5 f(a))\right\} \\ & + \gamma_2 \cdot \left\{\frac{24}{b-a}\int_{\xi}^{b} f(x)\, dx - (5 f(b) + 8 f(\xi) - f(a))\right\}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten ist es nützlich, das Intervall (a, b) durch $x = x(u) = (b-a)\,u + \frac{b+a}{2}$ auf das Intervall $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ zu transformieren. Bedeutet dann

$$f^*(u) = f(x(u)), \quad G^*(u) = G(x(u)),$$

$$\mu_k^* = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} u^k\, d\, G^*(u),$$

und fordert man Übereinstimmung der Näherungswerte mit dem wahren Integralwert für

$$f^*(u) = 1, u, u^2, u^3, u^4,$$

so sind die gesuchten Koeffizienten aus

$$\begin{aligned} \mu_0^* &= \quad 12\,\alpha_1 + 12\,\alpha_2 \\ \mu_1^* &= -\ 3\,\alpha_1 + 3\,\alpha_2 \\ \mu_2^* &= \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\,\beta \\ \mu_3^* &= -\frac{3}{4}\,\alpha_1 + \frac{3}{4}\,\alpha_2 + \frac{3}{8}\,\gamma_1 - \frac{3}{8}\,\gamma_2 \\ \mu_4^* &= \quad \frac{1}{4}\,\alpha_1 + \frac{1}{4}\,\alpha_2 + \frac{1}{8}\,\beta - \frac{1}{10}\,\gamma_1 - \frac{1}{10}\,\gamma_2 \end{aligned}$$

zu berechnen. Man erhält $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ als Linearverbindungen von $\mu_0^*, \ldots, \mu_4^*$ mit der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{16} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{16} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{16} \end{pmatrix}.$$

Die Größen $\mu_0^*, \ldots, \mu_4^*$ ihrerseits sind Linearverbindungen von $\mu_0, \ldots, \mu_4$:

$$\mu_k^* = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} u^k \, dG^*(u) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{b-a}\left(x - \frac{b+a}{2}\right) \right\}^k dG(x)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^k} \sum_{\varkappa=0}^{k} \binom{k}{\varkappa} \left(-\frac{b+a}{2}\right)^{k-\varkappa} \cdot \mu_\varkappa .$$

Demnach sind $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ Linearverbindungen von $\mu_0, \ldots, \mu_4$ mit einer Matrix, die man aus $\mathfrak{A}$ und

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{b-a} \cdot \frac{b+a}{2} & \frac{1}{b-a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 & \frac{-2}{(b-a)^2} \cdot \frac{b+a}{2} & \frac{1}{(b-a)^2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{(b-a)^3} \cdot \left(\frac{b+a}{2}\right)^3 & \frac{3}{(b-a)^3} \cdot \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 & \frac{-3}{(b-a)^3} \cdot \frac{b+a}{2} & \frac{1}{(b-a)^3} & 0 \\ \frac{1}{(b-a)^4} \cdot \left(\frac{b+a}{2}\right)^4 & \frac{-4}{(b-a)^4} \cdot \left(\frac{b+a}{2}\right)^3 & \frac{6}{(b-a)^4}\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 & \frac{-4}{(b-a)^4} \cdot \frac{b+a}{2} & \frac{1}{(b-a)^4} \end{pmatrix}$$

dadurch gewinnt, daß man die Produktmatrix $\mathfrak{AB}$ bildet.

In der Praxis ist es manchmal vorteilhaft, die Transformation auf das Intervall $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ beim Integral selbst vorzunehmen, um die Möglichkeiten der geschlossenen Integration, die sich dabei etwa ergeben, auszunutzen; das wird in der Regel einen geringeren Aufwand erfordern als die Multiplikation der Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Als Beispiel wählen wir

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{du}{u + \frac{3}{2}} = \frac{4}{3} + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{u}{\left(u + \frac{3}{2}\right)^2} du .$$

Wir wenden das Verfahren nunmehr auf das Integral rechts mit

$$f(u) = \frac{1}{\left(u + \frac{3}{2}\right)^2}, \quad g(u) = u, \quad a = -\frac{1}{2}, \quad \xi = 0, \quad b = +\frac{1}{2}$$

an, und erhalten

$$\lg 2 \sim \frac{499}{720} = 0.69305\,55\ldots,$$

richtig bis auf 9 Einheiten der 5. Dezimale.

Der allgemeine Ansatz, dessen erste Schritte wir ausgeführt haben, ist offenbar der Folgende: Nachdem die Stellen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ gegeben sind, sollen die

von $f(x)$ unabhängigen Koeffizienten $\mathsf{A}_0, \ldots, \mathsf{A}_n, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ so bestimmt werden, daß die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) \sim \mathsf{A}_0 \cdot f(x_0) + \cdots + \mathsf{A}_n \cdot f(x_n)$$

$$+ \Gamma_1 \cdot \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \cdots + \Gamma_n \cdot \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

zu einer Gleichung wird, wenn $f(x)$ ein Polynom von höchstens $2n$-tem Grade ist. Wenn wir auch nicht glauben, daß dieser Ansatz über die von uns behandelten Spezialfälle (das Verfahren des § 1 erhält man für $n = 1$ mit der Nebenbedingung $\mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 = 0$) hinaus praktische Bedeutung gewinnt, so werden wir doch im letzten Paragraphen (§ 6) zeigen, daß das resultierende lineare Gleichungssystem für $\mathsf{A}_0, \ldots, \mathsf{A}_n, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ stets und eindeutig lösbar ist.

§ 6.

Um die soeben erwähnte Aufgabe zu lösen, ziehen wir — eines merklichen Vorteils wegen — die Nenner $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}$ in die Koeffizienten $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ hinein, setzen also die Näherungsformel in der Gestalt

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) \sim \mathsf{A}_0 \cdot f(x_0) + \cdots + \mathsf{A}_n \cdot f(x_n) + \Gamma_1 \cdot \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \cdots + \Gamma_n \cdot \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

an. Wählt man der Reihe nach $f(x) = 1, 2x, \ldots, (2n+1)x^{2n}$, so erhält man zur Bestimmung von $\mathsf{A}_0, \ldots, \mathsf{A}_n, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & x_1 - x_0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_{n-1} \\ 2x_0 & 2x_1 & \cdots & 2x_n & x_1^2 - x_0^2 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^2 - x_{n-1}^2 \\ 3x_0^2 & 3x_1^2 & \cdots & 3x_n^2 & x_1^3 - x_0^3 & x_2^3 - x_1^3 & \cdots & x_n^3 - x_{n-1}^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (2n+1)x_0^{2n} & \cdots & \cdots & (2n+1)x_n^{2n} & x_1^{2n+1} - x_0^{2n+1} & \cdots & \cdots & x_n^{2n+1} - x_{n-1}^{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Wir haben zu zeigen, daß die Determinante $D(x_0, \ldots, x_n)$ dieser Matrix von Null verschieden ist, falls die Größen $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind.

Wir konstatieren zunächst:

1. *$D(x_0, \ldots, x_n)$ ist eine symmetrische Funktion der Größen $x_0, \ldots, x_n$.*
2. *$D(x_0, \ldots, x_n)$ ist eine homogene Form vom Grade $2n(n+1)$.*

Ferner:

3. *$D(x_0, \ldots, x_n)$ ist durch $(x_1 - x_0)^3$ teilbar.*

In der Tat hat die $(n+2)$-te Spalte der Matrix den Faktor $x_1 - x_0$; beseitigt man diesen und subtrahiert von der $(n+2)$-ten Spalte die halbe Summe der ersten und zweiten, bildet man also

$$x_1^{\varkappa-1} + x_1^{\varkappa-2}x_0 + \cdots + x_0^{\varkappa-1} - \frac{\varkappa}{2}(x_1^{\varkappa-1} + x_0^{\varkappa-1}) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, 2n+1),$$

so verschwinden diese Ausdrücke für $\varkappa = 1$ und $\varkappa = 2$, und weisen für $\varkappa \geqq 3$ den Faktor $x_1 - x_0$ auf. Ein dritter Faktor $x_1 - x_0$ ergibt sich schließlich aus der Differenz der ersten und zweiten Spalte, d. h. die Determinante ist durch $(x_1 - x_0)^3$ teilbar. — Wegen der Symmetrieeigenschaft folgt daraus, wenn

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu>\nu}}^{n} (x_\mu - x_\nu)$$

gesetzt wird:

4. *Die Determinante ist in der Gestalt*

$$D(x_0, \ldots, x_n) = F(x_0, \ldots, x_n) \cdot V^3(x_0, \ldots, x_n)$$

darstellbar, wo $F(x_0, \ldots, x_n)$ *eine Form des Grades* $\frac{n(n+1)}{2}$ *ist.*

Nun ist weiter, weil $V^3(x_0, \ldots, x_n)$ alternierend, $D(x_0, \ldots, x_n)$ symmetrisch ist, notwendig $F(x_0, \ldots, x_n)$ alternierend, also durch $V(x_0, \ldots, x_n)$ teilbar, und aus Gradrücksichten bis auf einen konstanten Faktor c_n mit $V(x_0, \ldots, x_n)$ identisch. Wir haben damit:

5. *Die Determinante hat die Gestalt*

$$D(x_0, \ldots, x_n) = c_n \cdot V^4(x_0, \ldots, x_n),$$

wo c_n *eine Konstante bedeutet.*

Es bleibt noch zu zeigen:

6. *Es ist* $c_n \neq 0$ *für* $n = 1, 2, \ldots$.

Dazu wählen wir $x_0 = 0$, $x_1 = 1, \ldots, x_n = n$, und stellen für $D(0, 1, \ldots, n)$ eine Rekursionsformel auf, nachdem wir aus 5. noch die Gültigkeit von

$$D(1, 2, \ldots, n+1) = D(0, 1, \ldots, n)$$

entnommen haben. Für $n \geqq 2$ wird

$$D(0,1,\ldots,n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & \cdots & 2\cdot n & 1^2 & 2^2-1^2 & 3^2-2^2 & \cdots & n^2-(n-1)^2 \\ 0 & 3\cdot 1^2 & 3\cdot 2^2 & \cdots & 3\cdot n^2 & 1^3 & 2^3-1^3 & & \cdots & n^3-(n-1)^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & (2n+1)1^{2n} & \cdots & \cdots & (2n+1)n^{2n} & 1^{2n+1} & 2^{2n+1}-1^{2n+1} & \cdots & \cdots & n^{2n+1}-(n-1)^{2n+1} \end{vmatrix}$$

$$= n! \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 1\cdot 1^2 & 1\cdot 2^2 & \cdots & 1\cdot n^2 & 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ 2\cdot 1^3 & 2\cdot 2^3 & \cdots & 2\cdot n^3 & 1^3 & 2^3 & \cdots & n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (2n-1)\cdot 1^{2n} & \cdots & \cdots & (2n-1)n^{2n} & 1^{2n} & 2^{2n} & \cdots & n^{2n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \cdot (n!)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-1 & 3-2 & \cdots & n-(n-1) \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & \cdots & 2\cdot n & 2^2-1^2 & 3^2-2^2 & \cdots & n^2-(n-1)^2 \\ 3\cdot 1^2 & 3\cdot 2^2 & \cdots & 3\cdot n^2 & 2^3-1^3 & \cdots & \cdots & n^3-(n-1)^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (2n-1)\cdot 1^{2(n-1)} & \cdots & \cdots & (2n-1)n^{2(n-1)} & \cdots & \cdots & \cdots & n^{2(n-1)}-(n-1)^{2(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \cdot (n!)^4 \cdot D(1, 2, \ldots, n) = (-1)^n \cdot (n!)^4 \cdot D(0, 1, \ldots, n-1),$$

und da $D(0, 1) = -1$, also von Null verschieden ist, so ergibt sich daraus das Nichtverschwinden von $D(0, 1, \ldots, n)$ für beliebiges n. Dann kann aber $c_n = 0$ für kein n erfüllt sein.

Eingegangen 10. Oktober 1930.

Über ein Bild der R_4-Konfiguration $(10_6\, 15_4)$ im Linienraum.

Von *E. A. Weiss* in Bonn.

Vier Geraden [1], [2], [3], [4] allgemeiner Lage im R_4 bestimmen nach C. Segre eindeutig eine fünfte Gerade [0], die von den ersten vier linear-abhängig ist und daher von allen ∞^2 Ebenen getroffen wird, welche die vier Ausgangsgeraden schneiden [1]). Die Beziehung der fünf Geraden zueinander ist symmetrisch: Sie bilden zusammen ein „*Quintupel assoziierter Geraden*".

Die fünfte Gerade kann aus den vier ersten auf Grund eines *Schließungssatzes* leicht konstruiert werden: Bezeichnet [2]) man mit (ik) das Verbindungsflach (R_3) der Geraden $[i]$ und $[k]$ und mit $[ikl]$ die Schnittgerade der Flache (kl), (li), (ik), so laufen die Verbindungsflache der Geradenpaare

$$[1],\ [234];\ [2]\ [341];\ [3],\ [412];\ [4],\ [123]$$

durch eine Gerade, die gesuchte fünfte Gerade [0].

Ein so konstruiertes Quintupel assoziierter Geraden gibt Veranlassung zu einer, ebenfalls zuerst von C. Segre behandelten *Konfiguration* [3]): Je zwei der fünf Geraden $[i]$ und $[k]$ bestimmen ein Verbindungsflach (ik) und die zehn Verbindungsflache führen zu zehn weiteren Schnittgeraden $[ikl]$. Die 10 Flache (ik) bilden dann mit den 15 Geraden $[i]$ und $[ikl]$ eine Konfiguration $(10_6\, 15_4)$: Jedes Flach enthält 6 Geraden und zwar etwa

(01) die Geraden [0], [1], [012], [013], [014], [234].

Jede Gerade enthält 4 Flache und zwar etwa

[0] die Flache (01), (02), (03), (04);
[123] die Flache (23), (31), (12), (04).

Von dieser Konfiguration hat bereits C. Stephanos mittels seines Pentazykel sein anschauliches Bild im R_3 entworfen [4]). Hier soll die Konfiguration mit der Figur zweier Möbiusscher Tetraeder in Verbindung gebracht werden. Der ihr zugrunde liegende Schließungssatz wird dabei auf einen Satz von H. Schröter über solche Tetraederpaare zurückgeführt.

Der Zusammenhang wird durch die bekannte Abbildung des Linienraumes auf eine M_4^2 im R_5 hergestellt: Bildet man die Geraden des projektiven Linienkontinuums auf die Punkte einer M_4^2 im R_5 ab, so entsprechen die Geraden eines regulären linearen Komplexes den Punkten einer M_3^2, die von einem nicht-tangierenden R_4 aus M_4^2 ausgeschnitten

[1]) Vgl. C. Segre, Alcuni considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni (Palermo Rend. **2** (1888)), wo der Satz synthetisch und R. Weitzenböck, Projektive Geometrie des R_4 (Sitzungsber. d. Wiener Akad. **121** IIa (1912)), wo der Satz analytisch bewiesen wird. Der Sachverhalt kommt am prägnantesten zum Ausdruck, wenn man sagt, daß die M_6 des R_9, auf deren Punkte man die Geraden des R_4 abbilden kann, die Ordnung 5 besitzt.

[2]) Die Bezeichnung ist der Charakteristikensymbolik der, bekanntlich eng mit der Segreschen Konfiguration zusammenhängenden, Kummerschen Konfiguration nachgebildet.

[3]) Vgl. z. B. Bertini-Duschek, Einführung in die proj. Geometrie mehrdimensionaler Räume, Wien 1924, S. 196.

[4]) Vgl. z. B. J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere, Oxford 1916, S. 482, Theorem 3.

wird. Die ∞^3 Geradenbüschel des Komplexes werden dabei auf die ∞^3 Geraden der M_3^2 abgebildet.

Wir gehen im R_4 von vier paarweise windschiefen Geraden [1], [2], [3], [4] aus. Durch diese Geraden laufen ∞^2 Mannigfaltigkeiten M_3^2. Wir wählen eine bestimmte reguläre M_3^2 aus und betrachten sie als Bildmannigfaltigkeit eines regulären Komplexes im R_3 („*Grundkomplex*").

Bei der Abbildung entsprechen den vier Geraden $[i]$ der M_3^2 vier Geradenbüschel des Grundkomplexes im R_3. Wir nennen ihre Scheitel $p_1p_2p_3p_4$ und ihre Ebenen $b_1b_2b_3b_4$. Die beiden Tetraeder p_i und b_i befinden sich dann in Möbiusscher Lage: Es läuft nicht nur jede Ebene b_i des zweiten Tetraeders durch den entsprechenden Eckpunkt p_i des ersten, sondern auch umgekehrt läuft jede Ebene a_i des ersten durch den entsprechenden Eckpunkt q_i des zweiten. Die 12 Geraden $\widehat{p_iq_k}$ $(i \neq k)$ sind Komplexgeraden und daher mit den entsprechenden Geraden $\widehat{b_ia_k}$ identisch.

R_4	R_3
Punkte einer regulären M_3^2.	*Geraden des Grundkomplexes.*
4 *Geraden*: [1], [2], [3], [4]	4 *Geradenbüschel*: (p_1b_1), (p_2b_2), (p_3b_3), (p_4b_4)
auf M_3^2	*im Grundkomplex.*

Verbindet man jetzt im R_4 die beiden Geraden $[i]$ und $[k]$, so erhält man ein Flach (ik), das M_3^2 in einer M_2^2 schneidet. Die Punkte dieser M_2^2 sind Bildpunkte der Geraden einer im Grundkomplex enthaltenen linearen Kongruenz, welche die Büschel (p_ib_i), (p_kb_k) enthält und durch ihre Leitgeraden, die Verbindungslinie $\widehat{p_ip_k}$ und die Schnittgerade $\widehat{b_ib_k}$ vollständig bestimmt ist:

6 *Flache*: (ik) $\quad i, k \neq 0$	6 *Lineare Kongruenzen mit den Leitgeraden*: $\widehat{p_ip_k}$, $\widehat{b_ib_k}$.

Die Geraden $\widehat{p_ip_k}$ und $\widehat{b_ib_k}$ sind übrigens zueinander nullpolar [1]).

Bringt man nun die drei Flache (23), (31), (12) zum Schnitt, so erhält man im R_4 eine Gerade [123]. Diese Gerade schneidet, als (einzige) gemeinsame Treffgerade der Geraden [1], [2], [3] die M_3^2 in drei Punkten und gehört also ganz der M_3^2 an. Um ihr Bild im R_3 zu finden, müssen wir daher das Komplexgeradenbüschel suchen, das den drei Kongruenzen mit den Leitgeraden

$$\widehat{p_2p_3}, \widehat{b_2b_3}; \quad \widehat{p_3p_1}, \widehat{b_3b_1}; \quad \widehat{p_1p_2}, \widehat{b_1b_2}$$

angehört. Da aber $p_1p_2p_3$ in der Ebene a_4 liegen und $b_1b_2b_3$ durch den in der Ebene a_4 gelegenen Punkt q_4 laufen, handelt es sich um das Büschel (q_4a_4). Also:

4 *Geraden*: [234], [341], [412], [123]	4 *Geradenbüschel*: (q_1a_1), (q_2a_2), (q_3a_3), (q_4a_4)
auf M_3^2	*im Grundkomplex.*

Man erhält jetzt weiter im R_4 das Flach (01) dadurch, daß man die Geraden [1] und [234] verbindet. Das Verbindungsflach wird wieder auf eine lineare Kongruenz abgebildet, welche diesmal die Büschel (p_1b_1) und (q_1a_1) enthält und daher die Geraden $\widehat{p_1q_1}$ und $\widehat{a_1b_1}$ zu Leitgeraden hat:

4 *Flache*:	4 *Lineare Kongruenzen mit den Leitgeraden*:
(oi) $i = 1, 2, 3, 4$	$\widehat{p_iq_i}$, $\widehat{a_ib_i}$.

Der fundamentale *Schließungssatz*, auf dem die Existenz der Segreschen Konfiguration beruht, lautet nun so:

---

[1]) Daraus folgt bekanntlich, daß die drei Geradenquadrupel $\widehat{p_1p_2}, \widehat{b_1b_2}, \widehat{p_3p_4}, \widehat{b_3b_4}$ usw. hyperboloidisch sind.

Die vier Flache (oi) *schneiden sich in einer Geraden* $[o]$, *die* M_3^2 *in zwei getrennten Punkten trifft*: g, g'.

Die vier linearen Kongruenzen mit den Leitgeraden $\widehat{p_iq_i}$ *und* $\widehat{a_ib_i}$ *haben zwei und nur zwei gemeinsame Geraden*: g, g'.

Der Satz rechter Hand rührt von H. Schröter her: „Hat man zwei einander gleichzeitig ein- und umbeschriebene Tetraeder, so sind die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken und die vier Schnittlinien entsprechender Seitenflächen acht Gerade im Raume, welche von denselben zwei Geraden getroffen werden . . . “ [1]).

Wir können also gegenüberstellen:

Gerade $[0]$ | *Komplexbüschel mit den Leitgeraden* g, g'.

Zur Vervollständigung der Figur fehlen jetzt noch die Bilder der sechs Geraden $[oik]$. Die Gerade $[012]$ beispielsweise ist Schnitt der Flache.

$$(01); \quad (02); \quad (12); \quad (34).$$

Als Bild erhält man also das Geradenpaar, das den vier linearen Kongruenzen mit den Leitgeraden

$$\widehat{p_1q_1},\ \widehat{a_1b_1}; \quad \widehat{p_2q_2},\ \widehat{a_2b_2}; \quad \widehat{p_1p_2},\ \widehat{b_1b_2}; \quad \widehat{p_3p_4},\ \widehat{b_3b_4}$$

gemeinsam ist: $\widehat{p_1q_2}, \widehat{p_2q_1}$. So hat man schließlich:

6 *Geraden* $[oik]$ | 6 *Geradenpaare* $\widehat{p_iq_k}, \widehat{p_kq_i}$.

Damit ist das Bild der R_4-Konfiguration im R_3 vollendet und es ist leicht, darin sämtliche Inzidenzbeziehungen anschaulich zu deuten. Zugleich werden wir aber durch die Abbildung auf einen neuen Satz geführt: Da die Gerade $[0]$ mit den Geraden $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$ ein Quintupel assoziierter Geraden bildet, laufen durch jeden ihrer Punkte, insbesondere also auch durch jeden ihrer beiden Schnittpunkte mit M_3^2 ∞^1 gemeinsame Treffebenen von $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$. Eine solche Ebene schneidet M_3^2 längs einer Kurve 2. Ordnung, die — abgebildet — einem im Grundkomplex enthaltenen Regulus 2. Ordnung entspricht, welcher von jedem der Geradenbüschel (p_ib_i) einen Strahl enthält. Wir wollen sagen, daß der Regulus mit diesen Geradenbüscheln *inzident* ist. Da die Gerade $[0]$ ebenso mit den Geraden $[234]$, $[341]$, $[412]$, $[123]$ ein Quintupel assoziierter Geraden bildet, gibt es entsprechend je ein System von Regelscharen 2. Ordnung durch g und g', welche mit den Büscheln (q_ia_i) inzident sind.

So führt die Abbildung auf den bemerkenswerten Satz:

Befinden sich zwei Tetraeder p_ia_i *und* q_ib_i *in Möbiusscher Lage und sind* g, g' *die gemeinsamen Treffgeraden der Verbindungslinien* $\widehat{p_iq_i}$ *und der Schnittgeraden* $\widehat{a_ib_i}$, *so laufen durch* g *und* g' *je zwei Systeme von* ∞^1 *Regelscharen, von denen eines mit den vier Büscheln* (p_ib_i), *das andere mit den vier Büscheln* (q_ia_i) *inzident ist.*

---

[1]) H. Schröter, Über eine Raumkurve vierter Ordnung und erster Spezies, Crelles J. **93** (1882), S. 143. Der recht umständliche Beweis kann durch folgenden einfacheren ersetzt werden: Die beiden Möbiusschen Tetraeder sind durch ihre Eckpunkte $p_1p_2p_3$, $q_1q_2q_3$ vollständig bestimmt. Diese gehören auf der durch sie hindurchlaufenden kubischen Raumkurve C^3 einer Involution an. Durch die Involution auf C^3 wird eine räumliche involutorische Kollineation induziert, welche die beiden Tetraeder miteinander vertauscht. Dabei bleiben also die Geraden $\widehat{p_iq_i}$ und daher auch ihre gemeinsamen Treffgeraden g, g' in Ruhe. Die induzierte Kollineation ist daher die windschiefe Involution mit den Ruhegeraden g, g'. Da diese Involution, wie gesagt, die beiden Tetraeder miteinander vertauscht, muß auch jede der Geraden $\widehat{a_ib_i} = \widehat{b_ia_i}$ in sich transformiert werden und also eine gemeinsame Treffgerade von g und g' sein. Wegen eines dritten Beweises siehe R. Sturm, Liniengeometrie I, Leipzig 1892, S. 69.

Eingegangen 5. August 1930.

AUG 8

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

D 13

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 165

FRIEDRICH SCHOTTKY

ZUM

80. GEBURTSTAG

AM

24. JULI 1931

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1931